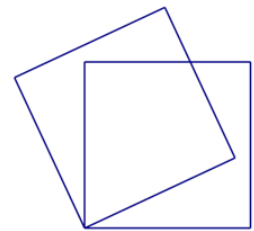


# 國立竹北高中 112 學年度 第 1 次教師甄選

## 數學科 試題卷

一、填充題：(每格 6 分，共 60 分)

1. 今有 1~10 十個數，任取 3 個相異數，最大和最小差距大於 5 的機率為\_\_\_\_\_。
2. 複數平面上，同時滿足  $|z-i|=|z|$  與  $|z-1|+|z|=\sqrt{2}$  的解有\_\_\_\_\_個。
3. 高鐵一共有 15 節車廂，若要選擇其中 3 節設置行動裝置的充電器，但這 3 節車廂任兩節車廂至少須間隔 2 個車廂 (含 2 個)，則共有\_\_\_\_\_種選擇方法。
4. 一邊長為 1 的正方形  $\Gamma_1$ ，逆時針旋轉  $\theta$  得正方形  $\Gamma_2$ ，若兩正方形重疊部分的面積為  $\frac{2}{3}$ ，則  $\tan \theta =$ \_\_\_\_\_。



5. 已知  $x, y, z$  滿足聯立方程式：
$$\begin{cases} \log_4 x + \log_8 (yz) = 2 \\ \log_4 y + \log_8 (xz) = 4 \\ \log_4 z + \log_8 (xy) = 5 \end{cases}$$
，且  $xyz = 2^k$ ，則  $k =$ \_\_\_\_\_。

6. 已知  $a, b$  皆為正實數，且  $a+b=k$ ，則  $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$  的最小值為\_\_\_\_\_。(答案請以  $k$  表示)

7.  $x^{100}$  除以  $x^3+x^2+x$  的餘式為\_\_\_\_\_。

8. 已知  $P(8,0)$  是圓  $C: x^2+y^2=144$  內部一點， $A$ 、 $B$  分別為圓上的點，且滿足  $\angle APB=90^\circ$ ，試求所有  $\overline{AB}$  中點  $M$  所形成的軌跡圖形所滿足的方程式為\_\_\_\_\_。

9. 空間中有一平面  $E$  及兩不在平面  $E$  上的固定點  $A$ 、 $B$ ，其中  $\overline{AB}$  長為 10， $\overline{AB}$  與平面  $E$  平行且距離為 6。設平面  $E$  上有一單位圓，其上有兩動點  $P$ 、 $Q$ ，則四面體  $ABPQ$  的最大體積為\_\_\_\_\_。

10. 已知方程式  $3\left||x-\sqrt{3}y|-8\right|+2\left||\sqrt{3}x+y|-18\right|=72$  在平面上定義了一個由若干線段所構成的封閉曲線  $\Gamma$ ，以原點為中心，將  $\Gamma$  逆時針旋轉  $60^\circ$  可得封閉曲線  $\Gamma'$ ，則封閉曲線  $\Gamma'$  所包圍的面積為\_\_\_\_\_。

二、計算證明題：(每題 10 分，共 40 分)

1. Sketch the graph of  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$ 。

2. 坐標空間中有兩不相交直線  $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$ ， $L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{-1}$ 。

另一直線  $L_3$  與  $L_1$ 、 $L_2$  皆相交且垂直。

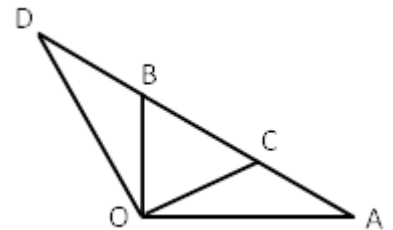
若  $P$ 、 $Q$  兩點分別在  $L_1$ 、 $L_2$  上且與  $L_3$  之距離分別為  $4\sqrt{3}$  及  $5\sqrt{2}$ ，則  $\overline{PQ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 請利用高中數學內容中兩種不同的方法解下列題目：

設  $O$ 、 $A$ 、 $B$  為坐標平面上不共線三點，其中向量  $\overrightarrow{OA}$  垂直  $\overrightarrow{OB}$ 。  
若  $C$ 、 $D$  兩點在直線  $AB$  上，

滿足  $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ 、 $3\overrightarrow{AD} = 8\overrightarrow{BD}$ ，且  $\overrightarrow{OC}$  垂直  $\overrightarrow{OD}$ ，

則  $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數)



4. 請說明選修數甲課程中，「牛頓法求根」要如何選取初始值，才能保證所得到的數列會收斂到欲求的根。

～～試題結束，祝福考生一切順利～～