請考生依指示
填寫准考證後二碼

臺北市 112 學年度市立普通型暨技術型
高級中等學校正式教師聯合甄選
數學科 題本

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答

※請先確認你的答案卡(本)、准考證與座位號碼是否一致無誤。如有不同應立即請監試委員處理。使用非本人答案卡(本)作答者，不予計分。

請閱讀以下測驗作答說明

測驗說明：

這是數學科題本，題本採雙面印刷。測驗時間 100 分鐘，作答開始與結束請聽從監試委員的指示。

作答注意事項：

1. 選擇題由電腦閱卷，限使用 2B 鉛筆作答。劃記不清楚致電腦無法判讀，由應考人員自行負責。
2. 非選擇題以黑筆或藍筆作答。
3. 劃記任何不相關記號及以其他顏色筆作答者不予計分。考試結束，答案卡(本)和試題本務必繳回，未繳回者以零分計算。

請聽到鈴（鐘）聲響後再翻頁作答

壹、選擇題：佔 20 分（共 4 題，每題 5 分）

單選題

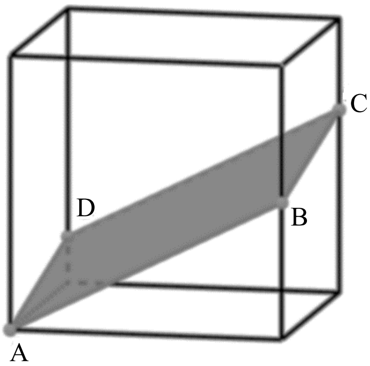
1. 有一正立方體平放在桌面上，而四邊形 $ABCD$ 是某一平面截此正立方體所得之圖形。若此正立方體的邊長為1，且 A、B、C 三點到桌面的距離分別為0、$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$，則D點到桌面的距離為下列哪一個選項？

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{1}{7}$

(C) $\frac{1}{8}$

(D) $\frac{1}{9}$



2. 已知方程式 $2x\sin(\pi x)=1$，且 $x\in[0,3]$，則此方程式共有幾個解？

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

3. 一疊撲克牌共10張，某種洗牌方式如下：洗完一次後，原第6張會變第1張，原第1張變第2張，原第7張變第3張，原第2張變第4張，…依此類推；換句話說，就是原來的第1到10張，會依序移到第2, 4, 6, 8, 10, 1, 3, 5, 7, 9張。若用此種洗牌方式連續洗了2023次後，則第10張牌會是一開始的第幾張牌？

(A) 第1張

(B) 第4張

(C) 第6張

(D) 第9張

4. 實力相當的甲乙兩人打桌球，已知兩人不論發球或接球，成功進球的機率都是 p 。當一方發球進球，但是對方沒打進，算連續進球數1球；當一方發球進球對方成功打進球，但下一球沒有進球，算連續進球數2球，依此類推。若要求「連續進球數」的期望值大於等於10球，則 p 的最小值為下列哪一個選項？

(A) $\frac{8}{9}$

(B) $\frac{9}{10}$

(C) $\frac{10}{11}$

(D) $\frac{11}{12}$

貳、非選擇題：佔 40 分（共 8 題，每題 5 分）

1. 建仔與伊森兩人欲測量教學大樓的高度，已知建仔的眼睛距離地面1.8公尺，伊森的眼睛距離地面1.6公尺，建仔在A處站立量測樓頂的仰角為α，而伊森從A處朝教學大樓方向直線前進45公尺後，站立量測樓頂的仰角為β(假設一路上皆為水平路面，沒有坡度)。若 $\tan\alpha=\frac{1}{6}$，$\tan\beta=\frac{1}{3}$，則教學大樓高度為___公尺。

2. 已知直線 $y=x$ 和圖形 $y=\log_a x$ 恰有相異兩交點 P 、Q。假若原點坐標為 O，且 P 點恰好為 $\overline{OQ}$ 中點，則 $\overline{OQ}^2$ 值為______。

3. 已知橢圓Γ的一頂點為$(0,3)$，$F_1(-4,0)$、$F_2(4,0)$為其焦點，若點$A(1,1)$，P 為Γ上的動點，則 $\overline{PA}+\overline{PF_2}$ 的最大值為______。

4. 已知 $\vec{a}=(6,8)$，$\vec{b}=(\sqrt{1-\sin\theta},\sqrt{\sin\theta})$，其中 $0\le\theta\le\pi$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最大值為______。

5. 已知空間一四面體 $ABCD$，其頂點坐標分別為 $A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0)$, $D(1,1,1)$，則此四面體內切球球心的 x 坐標為______。（答案不一定要有理化分母）

6. 設 n 為正整數，定義 n 的各位數的數字和為 $f(n)$，
例如：$f(2023)=2+0+2+3=7$，$f(135)=1+3+5=9$，
則滿足 $f(n)+n=2023$ 的所有正整數 n 的和為______。

7. ΔABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CA}=5$，已知點 P 在 ΔABC 內，且 P 至 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 之距離分別為 x、y、z，則 $3x^2+y^2+2yz+2z^2$ 的最小值為______。

8. X 為有限集合，定義函數 $f(X)$ 為 X 內最大的數，減第二大的數，加第三大的數，減第四大的數，…，依此類推。
例如：
$f(\{3,6,10,1\})=10-6+3-1=6$，$f(\{3,6,10,2,4\})=10-6+4-3+2=7$。
若 $A=\{1,2,3,4,\ldots,112\}$，而 X 為 A 中的非空子集，則所有 $f(X)$ 的和為______。

參、計算題：佔 40 分（共 4 題，每題 10 分）

1. 已知一平面上，行星 E 以圓形軌道逆時針繞行恆星 S，行星 E 的衛星 M 以圓形軌道逆時針繞行行星 E。阿宗觀察行星 E 繞行恆星 S 一圈需時500天，衛星 M 繞行行星 E 一圈需時50天，試回答下列問題：

(1) 若阿宗將恆心 S 的位置定為坐標原點 $(0,0)$，對於阿宗而言第0天時行星 E 的坐標在 $(400,0)$，衛星 M 的坐標在 $(401,0)$。求第 t 天時，衛星 M 的坐標（5分）。

(2) 承上題，若 $\angle SEM$ 在第0天時第一次等於 $180°$，求下一次 $\angle SEM=180°$ 時是第幾天。(5分)

2. 設圖形Γ的方程式為$x^2-xy+y^2=3$，將Γ上的每一點繞原點逆時針旋轉θ，所形成的新圖形為Γ'(其中$0°<\theta<90°$)，試回答下列問題：

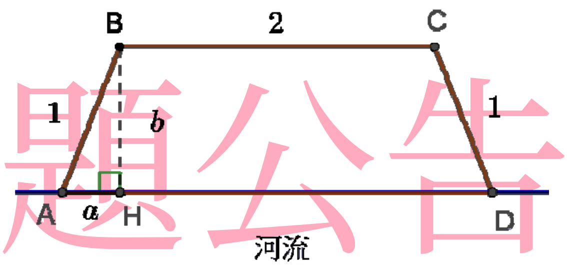
(1)求圖形Γ'的方程式。(6分)

(2)若圖形Γ'的方程式為$Ax^2+By^2=1$，其中A,B為常數，求A,B的值。(4分)

3. 如下圖所示，某人用長度分別為$1,2,1$的長直竹竿，在筆直的河岸旁圍成一個等腰梯形$ABCD$，其中$\overline{AB}=\overline{CD}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{BC}$與$\overline{AD}$平行，$\overline{BC}\le\overline{AD}$，$H$為$\overline{AD}$上一點，且$\overline{BH}\perp\overline{AD}$，令$\overline{AH}=a$，$\overline{BH}=b$，試回答下列問題：

(1) 以a,b表示等腰梯形$ABCD$的面積。(2分)

(2) 當等腰梯形$ABCD$有最大面積時，求此時的a值。(8分)



4. 平面上一直線L，L上依序有A,B,C,D相異四點，亦即B在$\overline{AC}$之間，C在$\overline{BD}$之間，動點P在平面上，試回答下列問題：

(1)求P點位置在哪裡時，使得$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$的值最小。(5分)

(2)若P點不在直線L上，且$\overline{AB}=\overline{CD}$，試證$\overline{PA}+\overline{PD}>\overline{PB}+\overline{PC}$。(5分)