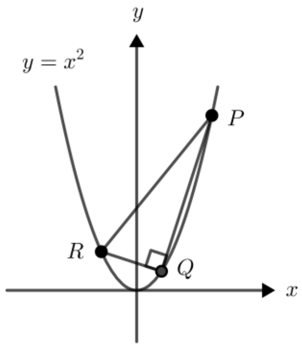
# 高雄市立高雄高級中學 112 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

（記憶版）

#考試當下試卷上無任何配分

1. 已知 $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$ 、$\overrightarrow{OB}=(1,-1,0)$ 、$\overrightarrow{OC}=(1,-2,1)$ ，當 $\left|\overrightarrow{OA}-x\overrightarrow{OB}-y\overrightarrow{OC}\right|$ 有最小值 $m$ 時，數對 $(x,y,m)=$ ？




2. 已知拋物線 $\Gamma: y=x^2$ 的圖形上有 $P(p,p^2)$ 、$Q(q,q^2)$ 、$R(r,r^2)$ 三點，且 $\Delta PQR$ 為一個直角三角形，如右圖所示。試求 $p+2q+r=$ ？

3. 已知台灣高鐵共有 12 節車廂，規劃隨機選取其中完全不相鄰 3 節車廂設置廁所，試問這 12 節車廂中哪一節車廂設置有廁所的機率最大？其值為多少？哪一節車廂設置有廁所的機率最小？其值為多少？

4. 已知三次函數 $f(x)=(x+\alpha)(x+2)(x+\beta)$ ，其中 $\alpha>2>\beta>0$。若 $y=f(x)$ 與 $x$ 軸圍成兩個封閉區域，其面積分別為 $A_1$ 、$A_2$ ，$y=f(x)$ 與 $x$ 軸、$y$ 軸所圍成的區域面積為 $A_3$ ，且滿足 $A_1=A_2=A_3$ ，試求 $f(x)$ 。

5. 坐標空間中有兩不相交直線 $L_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 、$L_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ 。另一直線 $L_3$ 與 $L_1$ 、$L_2$ 皆相交且垂直。若 $P$、$Q$ 兩點分別在 $L_1$ 、$L_2$ 上且與 $L_3$ 之距離分別為 $3\sqrt{2}$ 及 $2\sqrt{3}$ ，則 $\overline{PQ}=$ ？

6. 已知 $\Delta ABC$ 中，$\overline{AB}=c$ 、$\overline{BC}=a$ 、$\overline{CA}=b$ ，$D$ 為 $\overline{BC}$ 中點，試證明 $\sin\angle ADC\le\dfrac{2bc}{b^2+c^2}$ 。

7. (1) 請舉出一組 5 個數據的等差數列，其算術平均為$\sqrt{3}$、標準差為$\sqrt{2}$。

(2) $x\in\mathbb{R}$，試問 $f(x)=\cos(\sin x)$是否為週期函數？如果是，請寫出它的週期。

8. 設數列$\langle a_n\rangle$的一般項$a_n=\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$，

試證明：$\forall\, k\in\mathbb{N}$，$\exists\, m\in\mathbb{N}$，使得$a_m=k$。

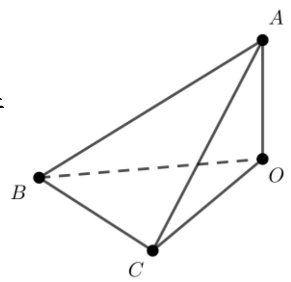
9. 設矩陣 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$、$B=[b_{ij}]_{n\times n}$ 為轉移矩陣（馬可夫鏈），試證明：$AB$ 是轉移矩陣。

10. 如圖所示，$A$ 為空中的一台戰機，$O$ 為戰機在地面上的鉛垂投影，

所以 $\overline{AO}\perp\overline{OB}$、$\overline{AO}\perp\overline{OC}$，已知 $B$、$C$ 為地面上的雷達觀測站，若

$B$ 雷達站測得情報 ① $\overline{BC}$ ② $\angle ABO$ ③ $\angle ABC$

C 雷達站測得情報 ④ $\angle ACO$ ⑤ $\angle ACB$




若使用上述五種情報中的某些情報組合，就可以測量計算出戰機的高度，

試寫出所有的組合（寫出情報編號即可，全對才給分）。

11. 已知 $p$ 是實數，有一串數列$\{x_1,x_2,\cdots,x_{10}\}$，若$\sum_{i=1}^{10}x_i=60$，$\sum_{i=1}^{10}{x_i}^2=400$，

試求 $f(p)=\sum_{i=1}^{10}(x_i-p)^2$ 的最小值。

12. 設 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-13x+5$，$g(x)=x^4+x^3+4x^2+45x+93$，

若 $S=\left\{a\in\mathbb{Z}\,\middle|\, f(a^2+a+1)<g(a^2+a+1)\right\}$，試求$n(S)$。

13. 設 $X \sim G(p)$（幾何分布）。 (1) 推導 $E(X)$ 公式　(2) 推導 $Var(X)$ 公式。

14. 坐標空間中，已知 $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (8,9,12)$，$\overrightarrow{d} = -10\overrightarrow{a} + 7\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}$，則 $(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) \cdot \overrightarrow{a} =$ ？

15. 網球比賽中，當兩隊比分為 4：4 時，稱為 Deuce。接下來，任何一隊球員必須要連續贏 2 分才能贏得該局，否則繼續延長下去。已知甲隊每場獲勝的機率為 0.6，今甲隊與與乙隊的比數為 3：4，試求甲隊贏得該局的機率。(原本題幹敘述約有三百字多字介紹網球比賽規則，但篇幅太長已回想不起來，此為參考 Math Pro 網友分享修改而成)

16. 投擲一顆公正骰子 1000 次，若總共出現 $k$ 次「6 點」，則得獎金 $k \times 3^k$ 元，已知所得獎金之期望值為 $x$，試問 $\log x$ 介於哪兩個連續整數之間？

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{1\times3}+\sqrt{2\times4}+\cdots+\sqrt{n\times(n+2)}}{n}-\dfrac{n}{2}\right)=$ ？

18. 已知 $f(x)$ 為三次多項式函數，其中三次項係數為 1，且 $f(0)=-1$、$f'(0)>0$、$f(1)\le 0$，若 $f(x)=0$ 有三實根，試證明：$f(2)\le 1$。