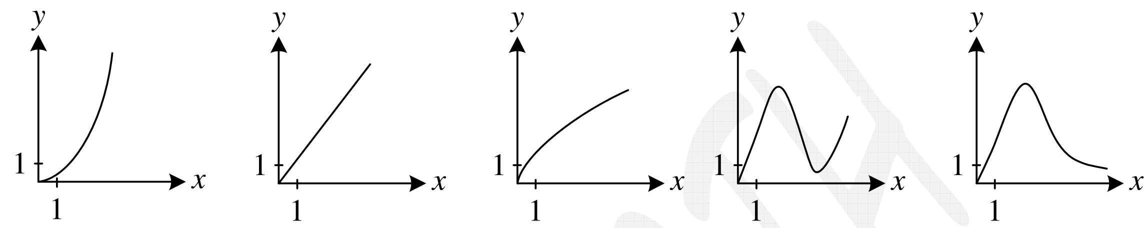
112 學測數 B 詳解

1. 某抽水站發現其用電量(單位：度)與抽水馬達轉速(單位：rpm)的三次方成正比。根據上述，試問下列這五個圖中，哪一個最可以描述此抽水站的用電量 y (度)與抽水馬達轉速 x (rpm)的對應關係？

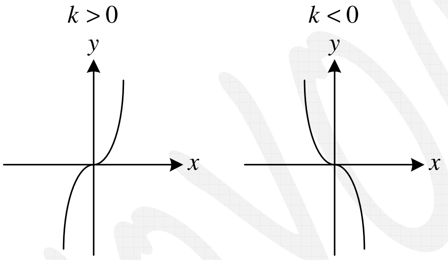
(1) (2) (3) (4) (5)



答案：(1)

詳解：y 與 x 的三次方成正比 $\Rightarrow y = kx^3$

可能為下列兩種圖形，最接近的選項為(1)



2. 考慮實數二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，若 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$，則 $c-2b$ 的值為何？

(1) -11 (2) -4 (3) 1 (4) 10 (5) 11

答案：(2)

詳解：$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \left(\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

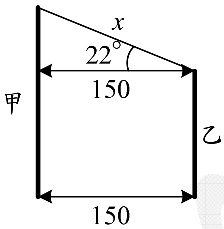
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -18 & 7 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & \frac{7}{2} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c - 2b = 3 - 2\times\frac{7}{2} = -4$$

3. 地面上有甲、乙兩大樓，已知甲的高度大於乙，且甲、乙兩大樓的水平距離為 150 公尺。某人從甲樓頂拉一條繩索到乙樓頂，並從甲樓頂測得乙樓頂的俯角為22°。假設該繩索被拉成直線，試問繩索的長度(單位：公尺)最接近下列哪個選項？(註：眼睛往下看目標物時，視線與水平線間的夾角稱為俯角）

(1) 150 (2) $150\sin 22^\circ$ (3) $150\cos 22^\circ$ (4) $\dfrac{150}{\cos 22^\circ}$ (5) $\dfrac{150}{\sin 22^\circ}$

答案：(4)



詳解：$\cos 22^\circ = \dfrac{150}{x}$

$\Rightarrow x = \dfrac{150}{\cos 22^\circ}$

4. 某校期中考試有 29 名考生，且成績均相異，統計後得到位於第 25、第 50、第 75 與第 95 百分位數的考生成績分別為 41、60、74 與 92 分。後來發現成績有誤需要調整分數，成績較高的前 15 名學生的分數應該要各加 5 分，其餘學生成績不變。假設調整後第 25、第 50、第 75 與第 95 百分位數的考生成績分別為a,b,c與d分，則數組(a,b,c,d)為下列哪個選項？

(1) $(41,60,74,92)$ (2) $(41,60,74,97)$ (3) $(41,60,79,97)$

(4) $(41,65,79,92)$ (5) $(46,65,79,97)$

答案：(3)

詳解：$29\times\dfrac{25}{100}=7.25\Rightarrow$ 第 25 百分位數為第 8 位

$29\times\dfrac{50}{100}=14.5\Rightarrow$ 第 50 百分位數為第 15 位

可得知由低到高第 15 位到第 29 位為前 15 位，均各加 5 分

只有第 25 百分位數不加 5 分，其餘三個皆加 5 分

所求$(a,b,c,d)=(41,65,79,97)$

5. 袋子裡有編號分別為$1, 2, \cdots, 100$的 100 顆球，某甲從袋中隨機抽取一球，每顆球被抽到的機率均相等。試問在下列哪個選項的條件下，某甲抽到 7 號球的條件機率最大？

(1) 某甲抽到球的號碼是奇數

(2) 某甲抽到球的號碼是質數

(3) 某甲抽到球的號碼是 7 的倍數

(4) 某甲抽到球的號碼不是 5 的倍數

(5) 某甲抽到球的號碼小於 10

答案：(5)

詳解：(1)抽到奇數的情形有 50 種$\Rightarrow$所求為$\dfrac{1}{50}$

(2)抽到質數的情形有 25 種$\Rightarrow$所求為$\dfrac{1}{25}$

(3)抽到 7 的倍數的情形有$\left[\dfrac{100}{7}\right]=14$種$\Rightarrow$所求為$\dfrac{1}{14}$

(4)抽到不是 5 的倍數的情形有$100-\left[\dfrac{100}{5}\right]=80$種$\Rightarrow$所求為$\dfrac{1}{80}$

(5)抽到小於 10 的情形有 9 種$\Rightarrow$所求為$\dfrac{1}{9}$

6. 某甲計算多項式$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$除以$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$的餘式，其中a, b, c, d為實數，且$a\neq 0$。他誤看成$g(x)$除以$f(x)$，計算後得出餘式為$-3x-17$。假設$f(x)$除以$g(x)$正確的餘式等於px^2+qx+r，則p的值會等於下列哪個選項？

(1) -3 (2) -1 (3) 0 (4) 2 (5) 3

答案：(3)

詳解：由除法原理$g(x)=f(x)\cdot Q(x)+(-3x-17)$

因為$f(x), g(x)$均為三次多項式，則$Q(x)$為常數

且根據兩者領導係數可得$Q(x)=a$

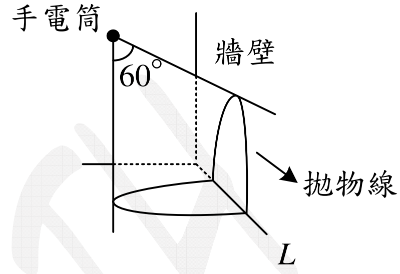
即$(ax^3+bx^2+cx+d)=(x^3+ax^2+bx+c)\cdot a+(-3x-17)$

移項得$(ax^3+bx^2+cx+d)+(3x+17)=(x^3+ax^2+bx+c)\cdot a$

$\Rightarrow \underbrace{(x^3+ax^2+bx+c)}_{f(x)}=\underbrace{(ax^3+bx^2+cx+d)}_{g(x)}\cdot(\dfrac{1}{a})+(\dfrac{3x+17}{a})$

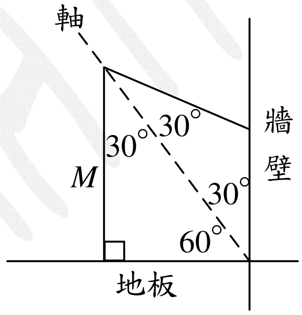
$f(x)$除以$g(x)$的餘式為$\dfrac{3}{a}x+\dfrac{17}{a}\Rightarrow p=0, q=\dfrac{3}{a}, r=\dfrac{17}{a}$

7. 已知某手電筒照射的光線為直圓錐狀，且光發散的夾角為60°，如圖所示。設牆壁與地板垂直且交界處為直線L，將此手電筒以垂直於L的方向照射，即此直圓錐的軸與L垂直。若手電筒照射在牆壁上的光線邊緣為拋物線的一部份，則在地板上的光線邊緣為下列哪種圖形的一部份？



(1) 兩相交直線
(2) 圓形
(3) 拋物線
(4) 長短軸不相等的橢圓
(5) 雙曲線

答案：(4)



詳解：因為在牆壁上的光線邊緣為拋物線
表示牆壁與直圓錐的母線M平行
即地板與直圓錐的母線M垂直
可得地板與軸的夾角為$60^\circ > 30^\circ$
(30°為母線與軸的夾角)
表示在地板的光線邊緣為「橢圓」

8. 某電子看板持續不斷的輪流播放A、B兩段廣告（A、B、A、$B \ldots$），每個廣告播放時間皆為T分鐘(其中T為整數)。某甲經過時剛好開始播放A廣告，30 分鐘後，某甲回到該處，看到恰好開始播放廣告B。試選出可能是T值的選項。

(1) 15　(2) 10　(3) 8　(4) 6　(5) 5

答案：(2)(4)

詳解：①若$\dfrac{30}{T}$為奇數，就會恰好開始播放B廣告

②若$\dfrac{30}{T}$為偶數，就會恰好開始播放A廣告

9. 已知$a=6$、$b=\dfrac{20}{3}$、$c=2\sqrt{10}$和d，且d為有理數，將這四個數標註在數線上，即$A(a)$、$B(b)$、$C(c)$和$D(d)$。試選出正確的選項。

(1) $a+b+c+d$必為一個有理數

(2) $abcd$必為一個無理數

(3) 點D有可能與點C的距離等於$2\sqrt{10}+6$

(4) 點A和點B的中點位在點C的右邊

(5) 數線上和點B距離小於8的所有點中，正整數有14個，負整數有1個

答案：(3)(4)(5)

詳解：(1) 有理數＋無理數必為無理數，$a+b+c+d$必為無理數

(2) 【反例】若$d=0$，則$abcd=0$為有理數

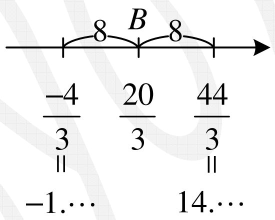
(3) 若C, D距離為$2\sqrt{10}+6 \Rightarrow$ 將C左右移動$2\sqrt{10}+6$可得D

$$\Rightarrow d=c\pm(2\sqrt{10}+6)=\underset{\text{不合}}{(4\sqrt{10}+6)}\ or\ 6=d\ (\text{有理數})$$

(4) $c=2\sqrt{10}=\sqrt{40}$

$$\frac{a+b}{2}=\frac{19}{3}=\sqrt{\frac{361}{9}}=\sqrt{40.\cdots}>c$$

(5) 如圖，正整數為$1\sim14$；負整數為-1



10. 某機構在 12 點時將兩種不同的營養劑分別投入培養皿甲與培養皿乙中，此時甲、乙的細菌數量分別為 X、Y。已知甲的數量每 3 小時成長為原來的 2 倍，例如 15 點時甲的數量為 $2X$。乙的數量每 2 小時成長為原來的 2 倍，例如 14 點時乙的數量為 $2Y$、16 點時乙的數量為 $4Y$，測量所得結果部分記錄於下表。該機構在 18 點時測量發現甲、乙的數量相同，欲以細菌數量隨時間呈指數成長的模型來預估甲、乙 12 點至 24 點的細菌數量。根據上述，試選出正確的選項。

時刻(點)	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
甲數量	X			$2X$									
乙數量	Y		$2Y$		$4Y$								

(1) $X > Y$

(2) 在 13 點時，甲的數量為 $\frac{4}{3}X$

(3) 在 15 點時，乙的數量為 $3Y$

(4) 在 19 點時，乙的數量為甲的 1.5 倍

(5) 在 24 點時，乙的數量為甲的 2 倍

答案：(1)(5)

詳解：(1) 經過 6 小時甲的數量為 $X\cdot 2\cdot 2$；乙的數量為 $Y\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

$X\cdot 2\cdot 2 = Y\cdot 2\cdot 2\cdot 2 \Rightarrow X:Y = 2:1$

(2) 甲每 3 小時成長為原來的 2 倍 $\Rightarrow$ 每 1 小時成長為原來的 $\sqrt[3]{2}$ 倍

在 13 點時，甲的數量為 $X\cdot\sqrt[3]{2}$

(3) 乙每 2 小時成長為原來的 2 倍 $\Rightarrow$ 每 1 小時成長為原來的 $\sqrt{2}$ 倍

在 15 點時，乙的數量為 $2Y\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}Y$

(4) 在 19 點時(經過 7 小時)，甲為 $X\cdot(\sqrt[3]{2})^7$；乙為 $Y\cdot(\sqrt{2})^7$

令 $X = 2k, Y = k$，則甲為 $8\cdot\sqrt[3]{2}k$；乙為 $8\cdot\sqrt{2}k$

則乙非甲的 1.5 倍

(5) 在 24 點時(經過 12 小時)，甲為 $X\cdot(\sqrt[3]{2})^{12}$；乙為 $Y\cdot(\sqrt{2})^{12}$

令 $X = 2k, Y = k$，則甲為 $2^5\cdot k$；乙為 $2^6\cdot k$

則乙為甲的 2 倍

YOYOMATH

11. 坐標平面上有一圓，其圓心為 $A(a\,,b)$，且此圓與兩坐標軸皆相切，令有一點 $P(c\,,c)$，其中 $a>c>0$，且已知 $\overline{PA}=a+c$，試選出正確的選項。

(1) $a=b$

(2) 點 P 位於直線 $x+y=0$ 上

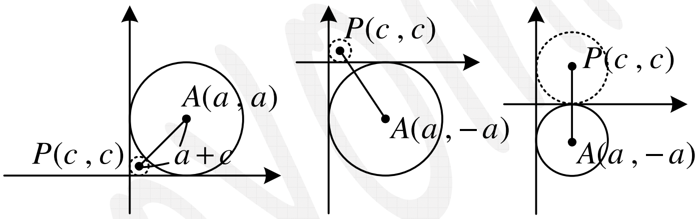
(3) 點 P 在此圓內

(4) $\dfrac{a+c}{b-c}=\sqrt{2}$

(5) $\dfrac{a}{c}=2+3\sqrt{2}$

答案：(1)(4)

詳解：若圓與兩坐標軸相切，且 $a>0$，圓心 A 可能在第一、四象限(圖一、二)
又已知 $\overline{PA}=a+c$，若圓在第四象限，則 $\overline{PA}>a+c$ (如圖二)
除非 $a=c$ (如圖三)，才會使 $\overline{PA}=a+c$，但已知 $a\neq c$，A 必在第一象限



圖一　　圖二　　圖三

(1) 圓心 $A(a\,,a)$，半徑為 a，則 $a=b$

(2) $P(c\,,c)$ 在 $y=x$ 上

(3) $\overline{PA}=a+c=r+c>r$，表示 P 點在圓外

(4) $\overline{PA}=a+c\Rightarrow\sqrt{(a-c)^2+(a-c)^2}=a+c$

$\Rightarrow 2(a-c)^2=(a+c)^2\Rightarrow\dfrac{(a+c)^2}{(a-c)^2}=2\Rightarrow\dfrac{a+c}{a-c}=\pm\sqrt{2}$ (負不合)

所求 $=\dfrac{a+c}{b-c}=\dfrac{a+c}{a-c}=\sqrt{2}$

(5) 承(4) $\dfrac{a+c}{a-c}=\sqrt{2}\Rightarrow a+c=\sqrt{2}(a-c)\Rightarrow(\sqrt{2}-1)a=(\sqrt{2}+1)c$

$\Rightarrow\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}$

YOYOMATH

12. 在球心為的球形地球儀上，有 A、B、C、D、E 五個點，其中 A、B、C 三點都在赤道上，且經度分別為東經 0°、60° 和 90°；D、E 兩點都在北緯線上，且經度分別為東經 0°、180°。試選出正確的選項。

(1) 赤道的長度等於東經 0° 和 180° 這兩條經線長度的總和

(2) 北緯 45° 線的長度等於赤道長度的 $\frac{1}{2}$

(3) 「由 A 沿赤道移動到 B 的最短路徑長」等於「由 D 沿東經 0° 經線移動到北極點的路徑長」

(4) 「由 D 沿北緯 30° 線移動到 E 的路徑長」等於「由 D 沿東經 0° 經線移動到北極點，再由北極點沿東經 180° 經線移動到 E 的路徑長的總和」

(5) 通過北極點與 A 點的直線與通過北極點與 C 點的直線互相垂直

答案：(1)(3)

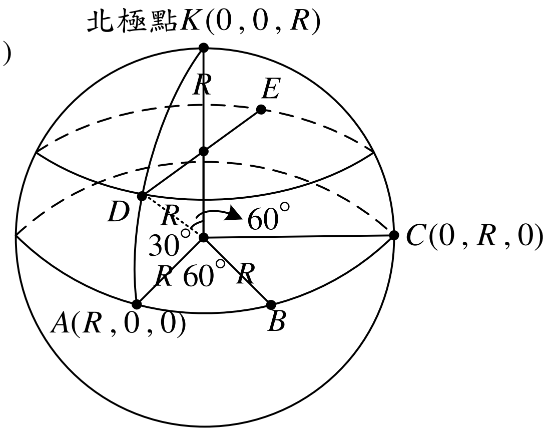
詳解：(1) 赤道長度為 $2\pi R$ (R 為球的半徑)
任一條經線長都是以 R 為半徑的一半圓周
所以兩條經線總和等於赤道長

(2) 北緯 45° 線的長度為一圓周長(半徑為 $R\times\cos 45^\circ$)
得 $2\pi(R\times\cos 45^\circ)=\sqrt{2}\pi R$ 不等於赤道長度的一半

(3) 如圖，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DK}=R\times(\frac{\pi}{3})$ (圓心角均為 60°)

(4) ① $\overset{\frown}{DE}=(R\cdot\cos 30^\circ)\times\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}R\pi$
(半徑為 $R\times\cos 30^\circ$，圓心角 180° 的圓弧)(在北緯 30° 的圓)
② $\overset{\frown}{DK}+\overset{\frown}{KE}=(R)\times\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}R\pi$ (半徑為 R，圓心角 $60^\circ\times 2$ 的圓弧)

(5) $\overrightarrow{KA}=(R,0,-R)$, $\overrightarrow{KB}=(0,R,-R)$
可得知 $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KB}=0+0+R^2\neq 0$
所以 $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KB}$ 不垂直



13. 有兩個正實數 $a\,,b$ ，已知 $ab^2=10^5$ ， $a^2b=10^3$ ，則 $\log b=$ ________

答案： $\dfrac{7}{3}$

詳解： $\begin{cases}(ab^2)^2=(10^5)^2\\ a^2b=10^3\end{cases}$ 將兩式相除

得 $b^3=10^7 \Rightarrow b=10^{\frac{7}{3}}$ ，所求 $\log b=\log(10^{\frac{7}{3}})=\dfrac{7}{3}$

14. 從 1 到 20 的 20 個整數中，取出相異的 3 個數 $a\,,b\,,c$ ，使其成為等差數列，且 $a<b<c$ ，則 $(a\,,b\,,c)$ 的取法有________種

答案：90

詳解：(法一)

已知 $a\,,b\,,c$ ，則 $b=\dfrac{a+c}{2}$ 必為整數

$a\,,c$ 必為兩偶數或兩奇數

$\underset{2偶}{C^{10}_2}+\underset{2奇}{C^{10}_2}=\dfrac{10\times 9}{2\times 1}+\dfrac{10\times 9}{2\times 1}=45+45=90$

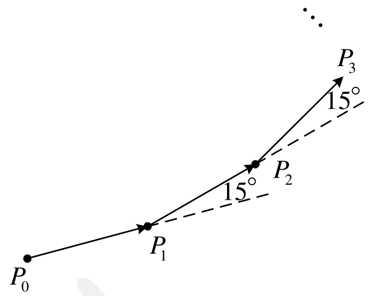
(法二)窮舉法

$1\,,2\,,3$	$2\,,3\,,4$	$3\,,4\,,5$	
$1\,,3\,,5$	$2\,,4\,,6$	$3\,,5\,,7$	……
$1\,,4\,,7$	$2\,,5\,,8$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$3\,,11\,,19$	
$1\,,10\,,19$	$2\,,11\,,20$		
9 個	9 個	8 個	

以此類推可得共有 $2(9+8+7+\cdots+1)=2\times\dfrac{(1+9)\times 9}{2}=90$

YOYOMATH

15. 如圖所示，平面上有一點 P_0 先朝某方向前進 2 個單位長到達點 P_1 後，依前進方向左轉 15 度；朝新方向前進 2 個單位長到達點 P_2 後，然後再依前進方向左轉 15 度；再朝新方向前進 2 個單位長到達點 P_3 後，…依此類推。則向量 $\overrightarrow{P_2P_3}$ 與 $\overrightarrow{P_5P_6}$ 的內積為________。(化為最簡根式)

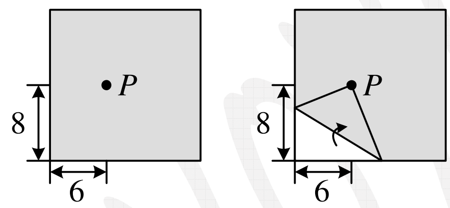


答案：$2\sqrt{2}$

詳解：$\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_5P_6}$ 的夾角為$15^\circ \times 3 = 45^\circ$且長度均為 2

$$\overrightarrow{P_2P_3} \cdot \overrightarrow{P_5P_6} = 2 \times 2 \times \cos 45^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

16. 正方形紙張上有一點 P，P 點距離紙張左邊界 6 公分，距離下邊界 8 公分。今將紙張的左下角 O 點往內摺至 P 點，如圖所示。則摺進去的三角形面積是________平方公分。



答案：$\frac{625}{24}$

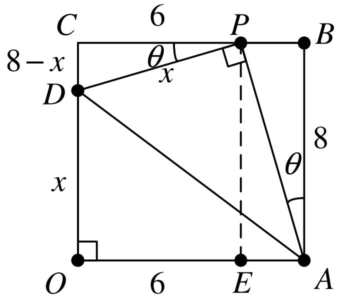
詳解：對折後，$\triangle DOA \simeq \triangle DPA$(兩三角形全等)

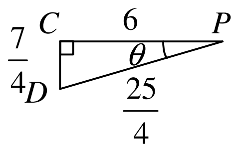
設$\overline{OD} = x$ ，則$\overline{CD} = 8 - x$ ，$\overline{DP} = x$

畢氏定理：$6^2 + (8-x)^2 = x^2 \Rightarrow x = \frac{25}{4}$

$$\overline{AP} = \frac{8}{\cos\theta} = \frac{8}{\frac{24}{25}} = \frac{25}{3}$$

$$\triangle APD = \frac{1}{2} \times \frac{25}{4} \times \frac{25}{3} = \frac{625}{24}$$





17. 考慮所有只用 0, 1, 2 三種數字組成的序列，序列長度n是指該序列由n個數字組成(可重複出現)。令$a(n)$為在所有長度n的序列中連續兩個零(即 00)出現的次數總和。 例如長度 3 的序列中含有連續兩個零的有 000，001，002，100，200，其中 000 貢獻 2 次 00，其餘各貢獻 1 次 00，故$a(3)=6$。則$a(5)$的值為________

答案：108

詳解：00□□□：有$3\times3\times3=27$次

□00□□：有$3\times3\times3=27$次

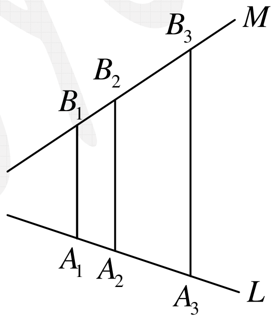
□□00□：有$3\times3\times3=27$次

□□□00：有$3\times3\times3=27$次

共有$27\times4=108$次

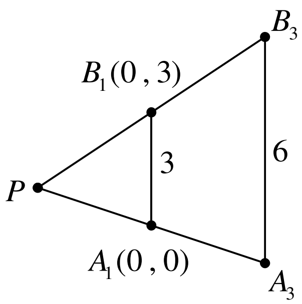
18-20 題為題組

空地上有三根與地面垂直且等高的電線桿，其底座在一直線上且間距相等。某甲以單點透視法在畫布上畫這三根電線桿。在畫布上設坐標系，使得電線桿皆與y軸平行，三根底座的點分別為$A(0,0)$、A_2、A_3，都在直線$L: x+3y=0$上；三根頂端的點分別為$B_1(0,3)$、B_2、B_3，都在直線$M: 2x-3y+9=0$上，如圖所示。已知$\overline{A_3B_3}=2\overline{A_1B_1}$，且由單點透視法可知直線$A_1B_3$與直線$A_3B_1$的交點在直線$A_2B_2$上。設$L$和$M$相交於$P$點(此點又稱為「消失點」)。根據上述，試回答下列問題。



18. 若向量$\overrightarrow{PA_1}=k\,\overrightarrow{PA_3}$，則$k$的值為________。(化為最簡分數)(選填題，3 分)

答案：$\dfrac{1}{2}$

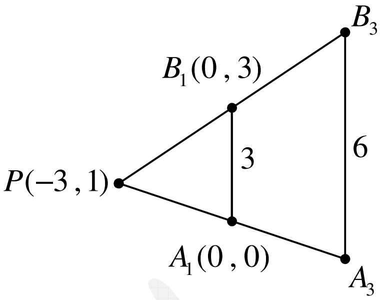


詳解：$\triangle B_1PA_1 \sim \triangle B_3PA_3$，又$\overline{A_1B_1}:\overline{A_3B_3}=2:1$

得$\overline{PA_1}:\overline{PA_3}=1:2$

則$2\overrightarrow{PA_1}=\overrightarrow{PA_3} \Rightarrow \overrightarrow{PA_1}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA_3}$

19. 試求 P 與 B_3 這兩點的坐標。(非選擇題，6 分)



答案：$P(-3,1)$，$B_3(3,5)$

詳解：① $P:\begin{cases} M: 2x-3y=-9 \\ L: x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow P(-3,1)$

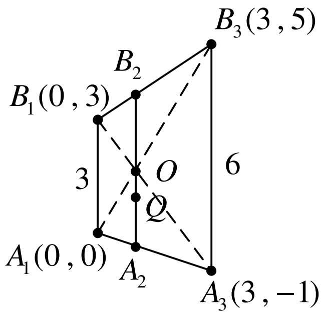
② $\overline{A_1B_1}=3 \Rightarrow \overline{A_3B_3}=6$

又 $\overline{PB_1}:\overline{B_1B_3}=1:1 \Rightarrow$ 可得 $B_3(3,5)$

20. 若有隻蜜蜂恰好停在中間那根電線桿上距離底座與頂端的長度比為 1：2 的位置上。某甲想在這個畫布的線段 A_2B_2 上畫出這隻蜜蜂，假設畫布上蜜蜂位置為 Q 點，即點 Q 到線段 A_2B_2 的底座 A_2 與到線段 A_2B_2 頂端 B_2 的長度比為 1：2，試求 Q 點坐標。（非選擇題，6 分）

答案：$Q(1,1)$

詳解：$\overline{A_3B_3}=6 \Rightarrow$ 得 $A_3(3,-1)$



因為直線 A_1B_3 與直線 A_3B_1 的交點在直線 A_2B_2 上

$\triangle A_1OB_1 \sim \triangle A_3OB_3$，且邊長比為 $1:2$

得 $\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}=\overline{B_1B_2}:\overline{B_2B_3}=1:2$

$A_2=\dfrac{2A_3+A_1}{3}=(1,\dfrac{-1}{3})$，$B_2=\dfrac{2B_3+B_1}{3}=(1,\dfrac{11}{3})$

因為 $\overline{A_2Q}:\overline{B_2Q}=1:2$，得 $Q=\dfrac{2A_2+B_2}{3}=(1,1)$