

臺中市立臺中第一高級中等學校 109 學年度
學術性向資賦優異【數理類】學生入班鑑定安置計畫
數學實作 試題卷

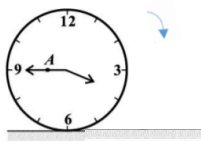
注意事項:本試題共 10 題填充題, 4 題計算與證明題。

* 填充題須化到最簡形式再將答案填入答案卷的指定格內。

* 計算和證明過程請填寫詳細過程在答案卷, 否則不予計分。

第一部分：填充題(每題 6 分, 共 60 分)

1. 一個時鐘垂直於水平桌面上, 其中分針上有一點 A 且當鐘面顯示 3 時 45 分時, A 點距離桌面的高度為 10 公分, 接著時鐘沿著直線等速率滾動, 到 4 時整時, 時鐘恰好滾一圈, 此時 A 點距離桌面的高度為 14 公分, 若依剛剛速率繼續滾動, 則到 5 時 5 分時, A 點距離桌面的高度為_____公分。

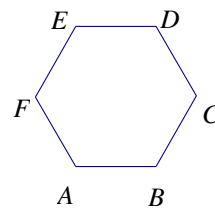


2. 有一機器人可以設定程式後開始行走。程式 N 的行走規則如下：
一開始機器人站在坐標平面上的原點, 面向 x 軸正向, 每次走的步數會按 1 步、2 步、3 步、 \dots 、 $N-1$ 步、 N 步、1 步、2 步、3 步、 \dots 、 $N-1$ 步、 N 步 \dots 的規律, 而每次走完後會順時針轉 90 度後再開始行走。
如 $N=3$ 時, 第一次向右走 1 步, 第二次向下走 2 步, 第三次向左走 3 步, 第四次向上走 1 步, 第五次向右走 2 步 \dots 。
請問 $N=4$ 時, 第 2020 次到達的點坐標為_____。
3. 大串、中串、小串參加一個遊戲, 在進行遊戲前, 每人先抓起一把錢, 然後開始遊戲。遊戲的規則是要互相贈送金錢。先由大串給中串、小串, 所給的金錢是等於中串、小串原來各有的金錢, 同樣地, 再由中串給大串、小串各自現有的金錢, 最後再由小串給大串、中串各自現有的金錢, 結果每人身上的金錢都是 32 元。若大串、中串、小串一開始所抓起的金錢分別為 a 元、 b 元、 c 元, 則序對 (a, b, c) 為_____。
4. 已知一個凸多邊形有一個內角不為 115° , 其餘的內角皆為 115° , 則這個不為 115° 的內角可能角度為_____度。
(不只一解)
5. 化簡 $\sqrt[3]{2\sqrt{13}-5} - \sqrt[3]{2\sqrt{13}+5}$ 為_____。
6. 設 $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$, 已知 α, β, γ 為 $g(x) = 0$ 的三個根, 則 $f(\alpha) \times f(\beta) \times f(\gamma)$ 之值為_____。

7. 如圖，有一個正六邊形堡壘 $ABCDEF$ 區域(含邊界)，
 其中 B 在 A 東方 200 公尺，在 A 北方 1 公里處有條東西向的筆直道路，
 已知敵軍戰車在這條道路上，從 A 正北方出發並向東行駛，
 且每隔 100 公尺，往離區域最近的點發射炮彈，則 D 點將被射擊_____次。



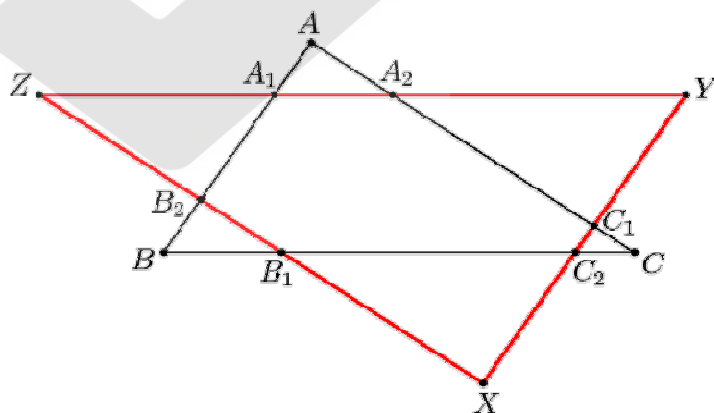
(圖未按比例， $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732$)



8. 若 a, b, c 為正整數，已知 $1 \leq a \leq b \leq c \leq 60$ 且 $c = ab$ ，則滿足條件的序對 (a, b, c) 有_____組。

9. 若 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，如 $[3.8] = 3$ ， $[6] = 6$ ， $[-5.1] = -6$ ，求 $\left[\frac{29 \times 1}{109} \right] + \left[\frac{29 \times 2}{109} \right] + \left[\frac{29 \times 3}{109} \right] + \dots + \left[\frac{29 \times 108}{109} \right]$ 之
 值為_____。

10. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 24$ ， $\overline{BC} = 44$ ， $\overline{CA} = 36$ ，若三線段 \overline{YZ} 、 \overline{XZ} 、 \overline{XY} 分別平行 \overline{BC} 、 \overline{AC} 及 \overline{AB} ，且交三邊於
 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ，已知 $\overline{A_1A_2} = 11$ ， $\overline{B_1B_2} = 9$ ， $\overline{C_1C_2} = 3$ ，求 $\frac{\triangle XYZ \text{ 的面積}}{\triangle ABC \text{ 的面積}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(圖未按比例)



第二部分：計算與證明題(每題 10 分，共 40 分)

- 已知 x, y, z 為整數，求方程組 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2(xz + 1) \\ x + y + z = 4038 \end{cases}$ 的解。(10 分)
- 已知 x, y, z 皆為實數，且 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ，求 $2x^2 + y^2 + 3z^2$ 的最大值及最小值。(10 分)
- 若 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，而 $\{x\} = x - [x]$ ，解方程式 $[x] \cdot \{x\} = \frac{1}{8}x^2$ 。(10 分)
- 有一四邊形 $ABCD$ 中， E 為對角線交點，設 $\triangle EAB$ 、 $\triangle EBC$ 、 $\triangle ECD$ 、 $\triangle EDA$ 的外心分別為 O_1 、 O_2 、 O_3 、 O_4 。
 而四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 中， P 為對角線交點，設 $\triangle PO_1O_2$ 、 $\triangle PO_2O_3$ 、 $\triangle PO_3O_4$ 、 $\triangle PO_4O_1$ 的內心分別為 I_1 、 I_2 、 I_3 、 I_4 ，
 (1)試證明四邊形 $O_1O_2O_3O_4$ 為平行四邊形。(5 分) (2)請利用(1)的結果，證明四邊形 $I_1I_2I_3I_4$ 為菱形。(5 分)

試題結束