高雄市立高雄女子高級中學 111 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

（記憶版）

計算證明題共 14 題

1. 已知一數列 $\langle a_n \rangle$，$a_1 = 1$，若 $a_{n+1} = \dfrac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$，$n \ge 1$，$n \in \mathbb{N}$，試求此數列的一般項 $a_n =$ ________。（7 分）

2. 設有 n 個正實數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 滿足 $\sum_{k=1}^{n} x_k = 48$，$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 36$，$\sum_{k=1}^{n} x_k^3 = 27$，則 n 的值為________。（7 分）

3. 若方程式 $x^8 + ax^4 + 1 = 0$ 恰有四個實根，且四實根為等差數列，則 a 之值為________。（7 分）

4. 方程式 $(x^2+4x+3)^2 + k = 0$ 有一正根、一負根及二個虛根，求 k 的範圍。（7 分）

5. $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{1^n+2^n}+\sqrt[n]{2^n+3^n}+\cdots+\sqrt[n]{(m-1)^n+m^n}}{m^2}\right)=$？（7 分）

6. 曲線 $y=x^2$ 與 $y=2x+15$ 所圍區域在 $x=t$ 與 $x=t+1$ 之間的面積的最大值。（7 分）

7. 設 $f(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}\int_a^x(2t-1)(t-2)^2\,dt$，若 $f(a)$ 極大值為 M，極小值為 m，則 $(M,m)=$？（7 分）

8. 平面上有二拋物線 Γ_1：$y=x^2+1$，Γ_2：$y=-(x-1)^2$。已知 Γ_1 與 Γ_2 有兩條公切線，共有 4 個切點，求此 4 點形成的四邊形的面積。（7 分）

9. 設 G 為 ΔABC 的重心，直線 L 過 G 分別與 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 交於 P、Q，請證明 ΔAPQ 的面積至少佔 ΔABC 的面積的 $\dfrac{4}{9}$ 倍。（7 分）

10. 已知矩陣 A 滿足 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 4 & -6 & -3 \end{bmatrix}$。若 $n \in \mathbb{N}$，

$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 4 & -6 & -3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$，求 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{9} a_i}{a_5} =$？（7 分）

11. 方程式 $\log_2(x^2 + 20x) - \log_2(4x - 3a - \dfrac{3}{2}) = 1$ 對 x 有唯一解，求實數 a 的範圍。（7 分）

12. 若 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ 滿足 $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$，證明：對於所有自然數 n，數列 $a_n = 3^n \cos n\theta$ 每一項均為整數且都不是 3 的倍數。（7 分）

13. 在 ΔABC 中，點 M、N 分別在 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 邊上滿足 $\overline{MB} = \overline{BC} = \overline{CN}$，若 R、r 分別為 ΔABC 外接圓半徑和內切圓半徑，求 $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$。（8 分）

14. 設 $x \geq y \geq z \geq w \geq 0$ 且滿足 $5x+4y+3z+6w=2013$，求 $x+y+z+w$ 的最大值 M 與最小值 m 為何？（8 分）