大學入學 111 學年度 分科測驗
數學甲 試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選填題（佔 76 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 設 a_1, a_2, a_3, a_4 是首項為 10、公比是 10 的等比數列。令 $b=\sum_{n=1}^{3}\log_{a_n} a_{n+1}$，試選出正確的選項。
(1) $2<b\le 3$　(2) $3<b\le 4$　(3) $4<b\le 5$　(4) $5<b\le 6$　(5) $6<b\le 7$　【111 分科測驗數甲】

答：(3)

解：$b=\sum_{n=1}^{3}\log_{a_n} a_{n+1}=\sum_{n=1}^{3}\dfrac{\log a_{n+1}}{\log a_n}$

$$=\frac{\log 10^2}{\log 10}+\frac{\log 10^3}{\log 10^2}+\frac{\log 10^4}{\log 10^3}=2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}=\frac{29}{6}=4\frac{5}{6}$$

2. 設 c 為實數使得三元一次方程組 $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+cy+3z=1 \\ 3x-3y+cz=0 \end{cases}$ 無解。試選出 c 之值。
(1) -3　(2) -2　(3) 0　(4) 2　(5) 3　【111 分科測驗數甲】

答：(2)

解：$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & c & 3 \\ 3 & -3 & c \end{vmatrix}=c^2-c-6=(c-3)(c+2)=0$

$c=3$，原式：$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+3y+3z=1 \\ 3x-3y+3z=0 \end{cases}$，無限多解，

$c=-2$，原式：$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-2y+3z=1 \\ 3x-3y-2z=0 \end{cases}$，無解

3. 坐標空間中 O 為原點，點 P 在第一卦限且 $\overline{OP}=1$。已知直線 OP 與 x 軸有一夾角為 $45°$，且 P 點到 y 軸的距離為 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。試選出點 P 的 z 坐標。
(1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(4) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　(5) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　【111 分科測驗數甲】

答：(4)

解：$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$，$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$，$x,y,z>0$

$\cos 45°=\dfrac{(x,y,z)\cdot(1,0,0)}{1\times 1}=x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$d(p,y軸)=\sqrt{x^2+z^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow z=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

二、多選題（佔 40 分）

4. 設多項式 $f(x)=x^3+2x^2-2x+k$、$g(x)=x^2+ax+1$，其中 k,a 為實數。已知 $g(x)$ 整除 $f(x)$，且方程式 $g(x)=0$ 有虛根。試選出為方程式 $f(x)=0$ 的根之選項。
(1) -3　(2) 0　(3) 1　(4) $\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}$　(5) $\dfrac{3+\sqrt{-5}}{2}$。　【111 分科測驗數甲】

答：(1)(4)

解：$g(x)=0$ 之二根 $p+qi$、$p-qi$ $\Rightarrow 2p=-a$，$p^2+q^2=1$

$f(x)=0$ 之三根 $p+qi$、$p-qi$，r $\Rightarrow 2p+r=-2$

且 $\left(p^2+q^2\right)r=-k$ 且 $p^2+q^2+2pr=-2$

$$\Rightarrow \begin{cases} r=1,\ p=-\dfrac{3}{2},\ k=-1,\ a=3,\ q\text{無解} \\ r=-3,\ p=\dfrac{1}{2},\ k=3,\ a=-1,\ q=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

5. 坐標平面上有一圖形 Γ，其方程式為 $(x-1)^2+(y-1)^2=101$。試選出正確的選項。
(1) Γ 與 x 軸負向、y 軸負向分別交於 $(-9,0)$、$(0,-9)$
(2) Γ 上 x 坐標最大的點是點 $(11,0)$
(3) Γ 上的點與原點距離的最大值為 $\sqrt{2}+\sqrt{101}$
(4) Γ 在第三象限的點之極坐標可用 $[9,\theta]$ 表示，其中 $\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$
(5) Γ 經旋轉線性變換後，其圖形仍可用一個不含 xy 項的二元二次方程式表示
【111 分科測驗數甲】

答：(1)(3)(5)

解：與 x 軸交點 $(11,0)$ 或 $(-9,0)$，與 y 軸交點 $(0,11)$ 或 $(0,-9)$

Γ 上 x 坐標最大的點應為 $\left(1+\sqrt{101},1\right)$

6. 假設 2 階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 所代表的線性變換將坐標平面上三點 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$ 分別映射到 $O(0,0)$，$A'\left(3,\sqrt{3}\right)$，$B'\left(-\sqrt{3},3\right)$，並將與原點距離為 1 的點 $C(x,y)$ 映射到 $C'(x',y')$。
(1) 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=6$　(2) $\overline{OC'}=2\sqrt{3}$　(3) $\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{OC'}$ 的夾角為 $60°$
(4) 有可能 $y=y'$　(5) 若 $x<y$ 則 $x'<y'$。　【111 分科測驗數甲】

答：(2)(4)

解：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$

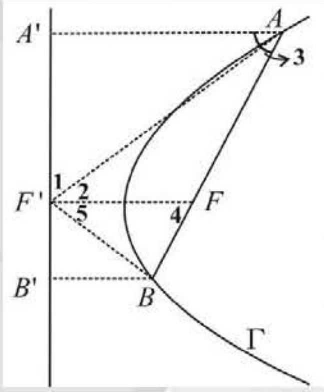
(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=12$，而 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=2\sqrt{3}\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$

(2)(3) $\overline{OC}=1$，$\overline{OC'}=2\sqrt{3}$，$\angle COC'=30^\circ$

(4)當 $(x,y)=\left(t,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$，$(x',y')=\left(\dfrac{9}{2}t,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

(5)反例 $(x,y)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1}{2}\right)$，$(x',y')=\left(-\sqrt{3},-3\right)$

7. 假設 A、B 為一拋物線 Γ 上兩點且其連線段通過 Γ 的焦點 F。設 A、F、B 在 Γ 之準線上的投影分別為 A'、F'、B'。試選出等於 $\dfrac{\overline{A'F'}}{\overline{A'A}}$ 的選項。（注意：此示意圖僅說明各點的相關位置，各點間距離關係並不正確）



(1) $\tan\angle 1$，其中 $\angle 1=\angle A'F'A$
(2) $\sin\angle 2$，其中 $\angle 2=\angle AF'F$
(3) $\sin\angle 3$，其中 $\angle 3=\angle A'AF$
(4) $\cos\angle 4$，其中 $\angle 4=\angle F'FB$
(5) $\tan\angle 5$，其中 $\angle 5=\angle FF'B$。

【111 分科測驗數甲】

答：(3)(5)

解：$\dfrac{\overline{A'F'}}{\overline{A'A}}=\cot\angle 1=\tan\angle 2=\tan\angle 5=\dfrac{\overline{A'F'}}{\overline{AF}}=\cos\left(90^\circ-\angle 4\right)=\sin\angle 4=\sin\angle 3$

8. 假設兩數列 $\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$，對所有正整數 n 都滿足 $b_n+\dfrac{4n-1}{n}<a_n<3b_n$。已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=6$，試選出正確的選項。

(1) $b_n<6-\dfrac{4n-1}{n}$　(2) $b_n>\dfrac{4n-1}{2n}$　(3)數列 $\langle b_n \rangle$ 有可能發散
(4) $a_{10000}<6.1$　(5) $a_{10000}>5.9$。

【111 分科測驗數甲】

答：(2)(5)

解：由夾擠定理：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(b_n+\dfrac{4n-1}{n}\right)=6$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3b_n\right)=6 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n=2$

三、選填題（佔 18 分）

9. 大吉百貨春節期間準備許多紅包讓顧客抽籤得紅包，並宣稱活動會一直持續到送出所有的紅包。抽籤的籤筒內有5支籤、其中只有1支籤有標示「大吉」，且每支籤被抽中的機會均等。每位顧客從籤筒中抽取一支籤記錄後，將籤放回籤筒再抽下一回，最多抽取3回。當抽取過程中出現連續兩回抽中「大吉」，則該顧客停止抽籤並得到紅包。我們可

將每位顧客抽籤是否得到紅包視為一次伯努力試驗。設整個活動第一個得到紅包的顧客是第 X 位抽籤的顧客，並以 $E(X)$ 表示隨機變數 X 的期望值，則 $E(X)=$______。（四捨五入到整數位）【111 分科測驗數甲】

答：14

解：中獎機率 $P=\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{9}{125}$

$$E(X)=\frac{1}{P}=\frac{125}{9}=13.8\cdots\doteq 14$$

10. 老師要求班上學藝安排在下週一、二、三、四這4天，發完國、英、數、社、自共5張複習卷，每天至少發其中一科的卷子給同學帶回家練習，隔天繳交。由於週二有國、英兩門課，國文老師要求國文的卷子**一定要**在週一發出以便檢討；而英文老師因為當天另有指派作業，所以要求英文的卷子**不要**在週二發出。依此要求，學藝共有______種安排方式。【111 分科測驗數甲】

答：42

解：$\left[\text{週一}(\text{國英})\right]\Rightarrow 3!=6$

$$\left[\text{週一}(\text{國}),\text{週三}(\text{英})\right]\Rightarrow \underbrace{3!}_{\substack{\text{數社自}\\\text{排一二四}}}+\underbrace{C^3_2C^1_1\times 2!}_{\substack{\text{數社自選兩科}\\\text{排二或四}}}+\underbrace{C^3_1\times 2!}_{\substack{\text{數社自選一科排三}\\\text{餘二科排二四}}}=18$$

$$\left[\text{週一}(\text{國}),\text{週四}(\text{英})\right]\Rightarrow \underbrace{3!}_{\substack{\text{數社自}\\\text{排一二三}}}+\underbrace{C^3_2C^1_1\times 2!}_{\substack{\text{數社自選兩科}\\\text{排二或三}}}+\underbrace{C^3_1\times 2!}_{\substack{\text{數社自選一科排四}\\\text{餘二科排二三}}}=18$$

合計 $=6+18\times 2=42$ 種

11. 在複數平面上，複數 z 在第一象限且滿足 $|z|=1$ 以及 $\left|\frac{-3+4i}{5}-z^3\right|=\left|\frac{-3+4i}{5}-z\right|$，其中 $i=\sqrt{-1}$。若 z 的實部為 a、虛部為 b，則 $a=$______、$b=$______。（化為最簡根式）【111 分科測驗數甲】

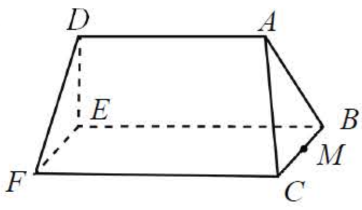
答：$a=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$b=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解：$\cos 2\theta=-\frac{3}{5}$，$\sin 2\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

第貳部分：混合題或非選擇題（佔 24 分）

<u>12-14 題為題組</u>

有一積木（如圖），其中 $ACFD$ 和 $ABED$ 是兩個全等的等腰梯形，$BCFE$ 是一個矩形。設 A 點在直線 BC 的投影為 M 且在平面 $BCFE$ 的投影為 P。已知 $\overline{AD}=30$、$\overline{CF}=40$、$\overline{AP}=15$ 且 $\overline{BC}=10$。將平面 $BCFE$ 置於水平桌面上，且將與 $BCFE$ 平行的平面稱為水平面。



試回答下列問題。

12. 利用$\overline{AD}$在平面$BCFE$的投影長為30，可得$\tan\angle AMP=$________。（選填題）

【111分科測驗數甲】

答：3

解：$\overline{AD}=\overline{PR}=30$，$\overline{CF}=\overline{MN}=\overline{BE}=40 \Rightarrow \overline{MP}=\overline{NR}=5$

$$\tan\angle AMP=\frac{\overline{AP}}{\overline{MP}}=3$$

13. 令Q為$\overline{FC}$上一點，滿足$\overrightarrow{AQ}$與$\overrightarrow{DF}$平行。利用ΔABC、ΔACQ為全等三角形，證明若水平面W介於A、P之間且與A的距離為x，則W與此積木所截的矩形區域之面積為$20x+\frac{4}{9}x^2$。（非選擇題）

【111分科測驗數甲】

證：$\frac{\overline{AH}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{AM}}=\frac{x}{15} \Rightarrow$長方形之寬$=\frac{x}{15}\cdot 10=\frac{2x}{3}$

又ΔABC與ΔACQ全等 $\Rightarrow$長方形之長$=30+\frac{2x}{3}$

所求面積$=\left(30+\frac{2x}{3}\right)\cdot\frac{2x}{3}=20x+\frac{4x^2}{9}$，得證

14. 將線段$\overline{AP}$的n等分點沿著向量$\overrightarrow{AP}$的方向依序設為$A=P_0, P_1, \cdots, P_{n-1}, P_n=P$。在每一個分段$\overline{P_{k-1}P_k}$，考慮以通過$P_k$的水平面與此積木所截的矩形為底、$\overline{P_{k-1}P_k}$為高，所形成的長方體。請利用此切片方法寫下估計此積木體積的黎曼和（不需化簡），且以定積分形式表示此積木的體積並求其值。（非選擇題）

【111分科測驗數甲】

答：黎曼和為$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(30+\frac{k}{n}\times 10\right)\left(\frac{k}{n}\times 10\right)\times\frac{15}{n}$，體積2750

解：過P_k之平面：$\frac{\overline{AP_k}}{\overline{AP}}=\frac{k}{n}\begin{cases}\text{長方形之寬}\ \frac{k}{n}\times 10\\ \text{長方形之長}\ 30+\frac{k}{n}\times 10\end{cases}$

則黎曼和為$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(30+\frac{k}{n}\times 10\right)\left(\frac{k}{n}\times 10\right)\times\frac{15}{n}$

$$=\int_0^1\left(100x^2+300x\right)\times 15\,dx=1500\int_0^1\left(x^2+3x\right)dx$$

$$=1500\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+C\right]\Bigg|_0^1=1500\left[\frac{11}{6}\right]=2750$$

15-17 題為題組

考慮坐標平面上之向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$滿足$\left|\overrightarrow{a}\right|+\left|\overrightarrow{b}\right|=9$以及$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=7$。若令$\left|\overrightarrow{a}\right|=x$，其中$1<x<8$，且令$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$的夾角為$\theta$，則利用向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$所形成的三角形，可將$\cos\theta$以$x$表示成$\dfrac{c}{9x-x^2}+d$，其中$c$、$d$為常數且$c>0$。令此表示式為$f(x)$，且其定義域為$\{x|1<x<8\}$。試回答下列問題。

15. 求$f(x)$及其導函數。（非選擇題） 【111 分科測驗數甲】

答：如詳解

解：$\left|\overrightarrow{a}\right|+\left|\overrightarrow{b}\right|=9 \Rightarrow \left|\overrightarrow{a}\right|^2+2\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|+\left|\overrightarrow{b}\right|^2=81$

$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=7 \Rightarrow \left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta+\left|\overrightarrow{b}\right|^2=49$

相減$\Rightarrow 2x(9-x)+2x(9-x)\cos\theta=32 \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{32-2x(9-x)}{2x(9-x)}=\dfrac{16}{x(9-x)}-1$

$f(x)=\dfrac{16}{9x-x^2}-1 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-16(9-2x)}{\left(9x-x^2\right)^2}$，$1<x<8$

16. 說明$f(x)$在定義域中遞增、遞減的情況。並說明x為多少時，$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$的夾角θ最大。（非選擇題） 【111 分科測驗數甲】

答：當$x=\dfrac{9}{2}$時，θ最大

解：當$1<x<\dfrac{9}{2}$，$f'(x)<0$，表遞減

當$\dfrac{9}{2}<x<8$，$f'(x)>0$，表遞增

當$x=\dfrac{9}{2}$，$f'(x)=0$，有$\cos\theta$之$Min=\dfrac{-17}{81}$，此時θ最大

17. 利用$f(x)$的一次估計（一次近似），求當$x=4.96$時，$\cos\theta$約為多少？（非選擇題） 【111 分科測驗數甲】

答：-0.2016

解：$f(x)=\dfrac{16}{9x-x^2}-1=\dfrac{16}{-(x-5)^2-(x-5)+20}-1\approx\dfrac{16}{-(x-5)+20}-1$

$f(4.96)\approx\dfrac{16}{-(4.96-5)+20}-1\approx-0.2016$