國立彰化女子高級中學 111 學年度第二次教師甄選 數學科試題

考試時間：120 分鐘

一、填充題 (每題 5 分，共計 75 分)

1.某冰淇淋店最少需準備 n 桶不同口味的冰淇淋，才能滿足廣告所稱「任選兩球不同口味冰淇淋的組合數超過 500 種」。試問來店顧客從 n 桶中任選兩球（可為同一口味）共有__________種方法。

2.<u>彰化女中</u>籃球校隊想招收隊員，某參加甄選的學生聲稱自身的投籃命中率 $p \geq 0.4$，校方想透過檢定的方式來決定她的聲稱是否採信。假設「此學生的投籃命中率 $p \geq 0.4$」且「投籃直到第一次進球共需 X 次」，在顯著水準為0.05的條件之下，求隨機變數 X 的拒絕域為__________。($\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$)

3.設正整數 x, y 滿足 $\sqrt{x}+\sqrt{2022}=\sqrt{xy+2022}$ ，試求數對$(x, y)=$ __________。(有兩組數對)

4. n是不超過1000的正整數，且$\frac{n+4}{n^2+7}$為最簡分數，問n有多少個可能值? __________。

5.如圖所示，A、B兩人面對面，中間有十個間隔，行進時A只能向右1或2格，B只能向左1或2格。A、B兩人輪流行動，A先動。若兩人停在同一格，這遊戲提前結束。問遊戲提前結束的方法有幾種? __________。

A											B

6.求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+\cdots+\frac{(n+2)}{n!+(n+1)!+(n+2)!}\right]=$__________。

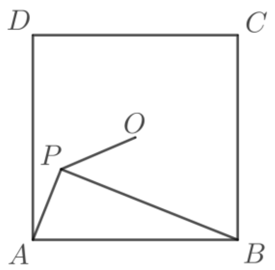
7.已知P為$\triangle ABC$內部的一點，滿足$\angle PBA=80°$，$\angle PBC=20°$，$\angle PCB=10°$，且$\angle PCA=30°$，則$\angle PAC=$__________。

8.設 n 為正整數，拋物線 $y=2^{2n+1}x^2-3\cdot 2^n x+1$ 與 x 軸交於 P_n 、 Q_n 兩點，與 y 軸交於 R_n ，設 a_n 為 $\Delta P_nQ_nR_n$ 的面積，試求$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=$__________。

9.試求由 $y=\dfrac{2e^{\sqrt{x}}}{2x-1}$ 、 $y=0$ 、 $x=1$ 、 $x=4$ 所圍的區域，繞 $x=2$ 旋轉的體積為__________。

10.空間中兩條歪斜線 L_1, L_2，P, Q 兩點在 L_1 上，R, S 兩點在 L_2 上，滿足 $\overline{PR}\perp\overline{PQ}$ 且 $\overline{QS}\perp\overline{PQ}$，已知 $\overline{PR}=3$，$\overline{QS}=5$，$\overrightarrow{PR}$ 與 $\overrightarrow{QS}$ 夾角為 $\frac{2\pi}{3}$，求兩條歪斜線 L_1, L_2 之距離__________。

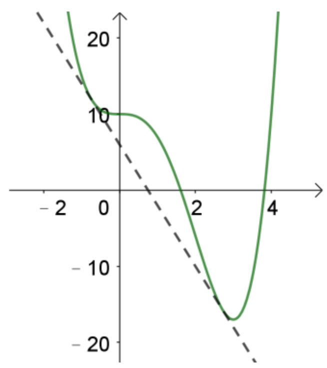
11.如圖，O 為正方形 $ABCD$ 之中心，P 為內部一點，滿足 $\overline{PA}\perp\overline{PB}$，$\overline{PO}=3$，$\overline{PA}=2\sqrt{2}$，求 $\overline{PB}=$__________。



12.若函數 $y=f(x)$ 滿足 $f(1-\frac{1}{x})+2f(\frac{1}{1-x})+3f(x)=12x$ ，其中實數 $x\neq 0,1$，求 $f(2)=$__________。

13.若一橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 有兩焦點 F_1,F_2 ，已知 F_1,F_2 到橢圓任一切線之距離乘積為定值，並求出此定值__________。

14.給定四次多項函數為 $f(x)=x^4-4x^3+10$ ，求與 $y=f(x)$ 恰有兩個相異切點的直線方程式（如下圖虛線所示）為__________。



15.空間中有一個邊長為 6 的正四面體 $OABC$，平面 ABC 上一點 P 滿足 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$ 。若通過 P 點且相異於平面 ABC 的另一個平面分別與射線 $\overrightarrow{OA}$ 、$\overrightarrow{OB}$ 、$\overrightarrow{OC}$ 交於 A' 、B' 、C'，求此平面與 $\overrightarrow{OA}$ 、$\overrightarrow{OB}$ 、$\overrightarrow{OC}$ 三射線圍出四面體 $OA'B'C'$ 中體積的最小值為__________。

二、計算證明題：(共計 25 分)

1. e 為自然常數：

   (1) π^e 與 e^π 何者較大? (2 分)

   (2)試證明之。 (6 分)

2. 已知平面上有 2022 個點 $P_1, P_2, \cdots, P_{2022}$ 落於單位閉圓盤內(圓心 O)，且存在著正實數 $a_1, a_2, \cdots, a_{2022}$ 滿足 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2022}^2 = \dfrac{1}{2022}$ 以及 $a_1\overline{OP_1} + a_2\overline{OP_2} + \cdots + a_{2022}\overline{OP_{2022}} \geq 1$，求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2022}$。 (8 分)

3. 已知 $\omega = \cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}$，求 $|2-\omega|^2 + |2-\omega^2|^2 + \cdots + |2-\omega^8|^2$。 (9 分)