

桃園市立武陵高級中等學校 111 學年度第一學期第 1 次正式教師甄選

數學科初試試題卷 甄選證號：_____ (請自行填寫) (計算證明題是記憶版)

※應試說明：1. 請將答案填寫至答案卷。2. 試題卷請於交卷時繳回，禁止攜出試場。

一、填充題 A (每題 6%，共 36 分)

1. $a > 1$ ，曲線 $y = \left| \frac{x^2}{2} - 1 \right|$ ，與圓 $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ 恰好交於 3 點，求 $a =$ _____。

2. $a, b, c, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x, y, z$ 皆為實數，且

$$\left(\begin{array}{c|c|c} a & b & \\ \hline x_1 & y_1 & z_1 \\ \hline \end{array} \middle| \begin{array}{c|c|c} b & c & \\ \hline y_1 & z_1 & x_1 \\ \hline \end{array} \middle| \begin{array}{c|c|c} c & a & \\ \hline z_1 & x_1 & y_1 \\ \hline \end{array} \right) = (1, 2, 3) \quad , \quad \left(\begin{array}{c|c|c} a & b & \\ \hline x_2 & y_2 & z_2 \\ \hline \end{array} \middle| \begin{array}{c|c|c} b & c & \\ \hline y_2 & z_2 & x_2 \\ \hline \end{array} \middle| \begin{array}{c|c|c} c & a & \\ \hline z_2 & x_2 & y_2 \\ \hline \end{array} \right) = (4, 5, 6) \quad .$$

若 x, y, z 滿足 $ax + by + cz = 0$ ，求 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z$ 之最小值_____。

3. 0~9 共 10 個數字，任取 n 個數字排列(可重複)，請問包含偶數個 9(含沒有 9)的排列有_____種。

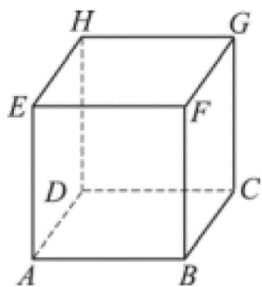
4. 甲乙兩人比賽桌球，約定比賽進行到有一人比另一人多贏 2 局，或者打滿 6 局時比賽結束。

設甲在每局中獲勝的機率均為 $\frac{3}{4}$ ，且各局勝負互不影響。則比賽結束時，已賽局數 X 的期望值

$E(X) =$ _____。

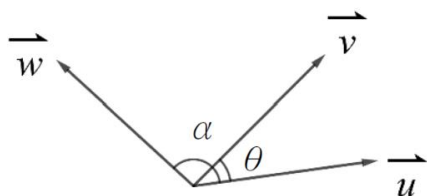
5. $\omega^{503} = 1, \omega \neq 1$, 求 $\frac{\omega^2}{\omega-1} + \frac{\omega^4}{\omega^2-1} + \frac{\omega^6}{\omega^3-1} + \cdots + \frac{\omega^{1004}}{\omega^{502}-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 有一個大正立方體由 27 個單位正立方體堆疊組成，今有一平面垂直平分大正立方體之內部對角線 \overline{AG} ，則該平面會與 個單位正立方體相交。



二、填充題 B (每題 8%，共 32 分)

7. 如圖， \vec{u} 與 \vec{v} 的夾角為 θ ， \vec{u} 與 \vec{w} 的夾角為 α ，且 $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}|$ ，若 $\vec{w} = f(\theta, \alpha)\vec{u} + g(\theta, \alpha)\vec{v}$ ，試求 $f(\theta, \alpha) + g(\theta, \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



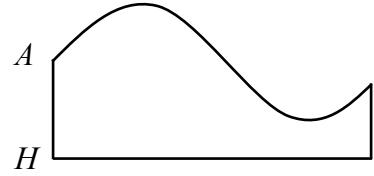
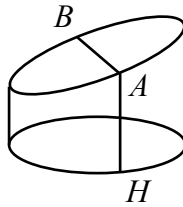
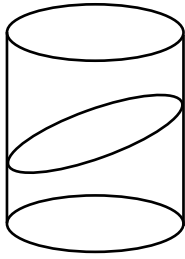
8. 拋物線 $\Gamma_1: y = x^2 - 2x + 2$ 與 $\Gamma_2: y = -x^2 + ax + b$ ，其中一個交點在兩拋物線所作的切線互相垂直，且 $a, b > 0$ 。求 ab 的最大值 。

9. 將方程式 $y^4 - 2xy^2 + 2x^2 - 4 = 0$ 圖形所圍成的封閉區域繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為_____。
10. 已知正數 a, b, c 滿足 $5c - 3a \leq b \leq 4c - a$ ， $c \ln b \geq a + c \ln c$ ，求 $\frac{b}{a}$ 的範圍：_____。(以區間記號表達)

三、計算證明題 (共 32 分)

1. 設 $x, y \in \mathbb{R}$ ，試求 $24x^4 + y^2 - 8x^2y - 40x^2 - 2y$ 的最小值。(10%)

2. 如圖，將一張長方形紙捲成直圓柱，且底面是半徑為 4 的圓。今以一平面截此圓柱，得一截痕為橢圓，其長軸長為 10，且短軸為 \overline{AB} 。將圓柱沿著鉛直線 \overline{AH} 剪開之後，以直線 AH 為 y 軸， A 為原點，右側方向為 x 軸正向 (坐標軸刻度單位即為題目敘述中的長度單位)，求波浪狀吻合的函數 $f(x)$ 。(10%)



3. 已知實數數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和為 S_n ，且方程式 $x^2 - a_n x - a_n = 0$ 有一根為 $S_n - 1$ 。(12%)
- (1) 試求 a_1, a_2 之值。
 - (2) 求 a_n 的一般項。