國立臺南第一高級中學 111 學年度第 2 次教師甄選【數學科】試題卷

第一部分：填充題 (第 1 到 5 題每題 4 分；第 6 到 12 題每題 5 分；第 13 到 15 題每題 6 分。共 73 分)

1. 已知 $\cos 4\theta = \frac{1}{3}$，求 $\sin^6\theta + \cos^6\theta =$_______ 。

2. 某壽司店電子扭蛋機的中獎機率 p 只能設定 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{5}$，今檢定準則如下：

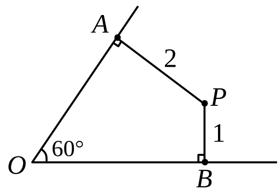
「連續玩 5 次，若中獎次數不超過 1 次，則判定 $p = \frac{1}{5}$；反之，則判定 $p = \frac{1}{3}$。」

試問，若 $p = \frac{1}{3}$，則可以做出正確判斷的機率為_______ 。

3. 設集合 $S = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$之兩個非空子集合 A、B 滿足 B 中的最小元素大於 A 中的最大元素，則 A、B 的組成方式有_______種情形。

4. 如右圖，$\angle AOB = 60°$，$\overline{PA} \perp \overline{OA}$，$\overline{PB} \perp \overline{OB}$，$\overline{PA} = 2$，$\overline{PB} = 1$，

若 $\overrightarrow{OP} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB}$，求數對（$\alpha , \beta$）=_______ 。



5. 投一均勻骰子 4 次，出現點數依次為 a , b , c , d，求 $abcd$ 為 100 的倍數的機率為_______ 。

6. 設單位圓 O 上有一定點 A 與兩動點 B、C，滿足 $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$，則 $2\,\overline{AB} + 3\,\overline{AC}$ 的最大值為_______ 。

7. 設 a、b、$c \in \mathbb{Z}$ 且 $b \neq 0$，若 $\frac{a + b\sqrt{2}i}{3}$ 與 c 是實係數方程式 $x^3 + dx^2 + ex + 1 = 0$ 之兩根，

則 $d + e$ 的最大值為_______ 。

8. 若實數 x、y 滿足 $x + y = 1$，當 $(x^3+1)(y^3+1)$ 有最大值時，求 $x^2 + y^2$ 之值為_______ 。

9. 求極限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n})^2(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)}{(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n})^3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}$ 之值為_______ 。

10. 設 a,b 為實數，且 $f(x) = 2x^3 + a(a+3)x^2 - 2x + 2b - a$ 可被 $(x+1)(x-1)$ 整除。

若對任意滿足 $|x| \le 1$ 的實數，$f(x) \ge 0$ 恆成立，則 a 的範圍為_______ 。

11. 已知 $p = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} + \cdots + \frac{1}{2021\times 2022}$，

$q = \frac{1}{1012\times 2022} + \frac{1}{1013\times 2021} + \frac{1}{1014\times 2020} + \cdots + \frac{1}{2022\times 1012}$，試求 $\frac{p}{q}$ 之值 =_______ 。

12. 坐標平面上有一正方形 $ABCD$，其中 $A(6,3)$、$B(2,6)$且 C、D 兩點分別位於第二、四象限，

若正方形內部區域可用不等式$|a_1x+b_1y+c_1|+|a_2x+b_2y+c_2|<1$表示，求$|c_1|+|c_2|=$______。

13. 長方體 $ABCD-EFGH$ 中，已知直線 AC 方程式為 $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+7}{1}$ ，

直線 HF 方程式為 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{-3}$ ，且 $A(3,-1,-7)$ 。試求矩形 $ABCD$ 面積為______。

14. 已知 $A(x,y)$ 在以原點為中心、邊長為 2 且邊長平行坐標軸的正方形上。若平面上有一點 $B(m,n)$

滿足 $(m-4)^2+(n-4)^2=4$ 且 $\sqrt{m^2+n^2}+\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(m+x)^2+(n+y)^2}$ ，則 x 的範圍為______。

15. 設正整數數列$\langle a_n \rangle$為嚴格遞增數列且滿足 $a_{a_n}=4n$ ，求 $a_8=$______。

第二部分：計算題 (請詳列計算過程，未有過程僅有答案者不給分。每題 9 分，共 27 分。)

1. 試求 $\left[\dfrac{10^{2022}}{10^{674}+2022}\right]$ 的末四位數，其中$[x]$表不大於 x 的最大整數。

2. 設複數平面上三點 $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ 、 $C(\gamma)$ 可連成正三角形 ABC，

已知α 、 β 、 γ 滿足 $\alpha^4-2\alpha^3\beta+(\beta^2-4)\alpha^2+8\alpha\gamma-4\gamma^2=0$ 且 α 的實部和虛部均為正數，

當$\triangle ABC$ 的重心 G 為 $\dfrac{\alpha^{111}}{2^{110}}$時，求 β 及 γ 各為多少？

3. 已知 $\deg f(x)=n\geq 2$ 且 $f'(x)$是 $f(x)$的因式，試求 $f(x)=0$ 的相異實根個數，

及 $y=f(x)$ 圖形的極值點個數、反曲點個數。

填充題參考解答(第 1 到 5 題每題 4 分；第 6 到 12 題每題 5 分；第 13 到 15 題每題 6 分。共 73 分)

1.	2.	3.	4.	5.	6.
$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{131}{243}$	129	$(\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{5})$	$\dfrac{41}{648}$	$2\sqrt{7}$
7.	8.	9.	10.	11.	12.
6	3	$\dfrac{64}{81}$	$-2\leq a\leq -1$	1517	$\dfrac{7}{5}$
13.	14.	15.			
$\dfrac{180}{13}\sqrt{26}$	$\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\leq x\leq 1$	16			