2020 **年亞太數學奧林匹亞競賽, 初選考試試題**

考試時間: 2019 年 11 月 30 日 上午 10:00 ~ 12:00

說明: 本試題共兩頁, 分成兩部分: 選填題與非選擇題。

作答方式:

- 選填題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答; 更正時, 應以橡皮擦擦拭, 切勿使用修正液(帶)。
- 非選擇題用藍、黑色原子筆在「答案卷」上作答; 更正時, 可以使用修正液 (帶)。
- 未依規定畫記答案卡, 致機器掃描無法辨識答案; 或未使用藍、黑色原子筆書寫答案卷, 致評閱人員無法辨認之答案者, 其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張, 不得要求增補。

**第一部份: 選填題**

說明: 本部份共有五題, 每一題或子題配分標於題前, 答錯不倒扣, 未完全答對不給分。

答案卡填答注意事項: 答案的數字位數少於填答空格數時, 請適度地在前面填入 0.

1. (7分) 設三角形 $ABC$ 滿足 $\cos A : \cos B : \cos C = 1 : 1 : 2$. 將 $\sin A$ 表示爲 $\sqrt[s]{t}$, 其中 $s$ 爲正整數, $t$ 爲正有理數且爲最簡分數。試問: $s + t = \underline{\dfrac{①②}{③}}$. (化成最簡分數)

2. 甲和乙兩人分別擲 $n$ 個公平的硬幣, 並以 $X$ 和 $Y$ 記兩個人投擲出正面向上的硬幣個數。假設兩人擲硬幣是互相獨立的實驗。試問:

   (1) (3分) $n = 5$ 時, $X = Y$ 的機率是多少? 答: $\underline{\dfrac{④⑤}{⑥⑦⑧}}$. (化成最簡分數)

   (2) (4分) $n = 6$ 時, $X = Y + 1$ 的機率是多少? 答: $\underline{\dfrac{⑨⑩}{⑪⑫⑬}}$. (化成最簡分數)

3. 令 $M$ 爲四位數之正整數。將 $M$ 的四個數字反過來寫出一個新的四位數 $N$ (例如: 將四位數 1234 的四個數字反過來寫, 變成 4321)。令 $C$ 爲 $M$ 的各位數的數字和。已知 $M, N$ 與 $C$ 滿足下列性質:

   (i) 令 $d$ 爲 $M - C$ 與 $N - C$ 的最大公因數且 $d < 10$.

   (ii) $\dfrac{M - C}{d}$ 與 $\dfrac{N}{2} + 1$ 的整數部分相同。

   試問:

   (1) (3分) $d = \underline{⑭}$.

   (2) (4分) 若滿足上述性質 (i) 與 (ii) 的 $M$ 共有 $m$ 個, 且最大的值爲 $M_{max}$ 則 $(m, M_{max}) = \underline{(⑮⑯, ⑰⑱⑲⑳)}$.

4. (7分) 令 $\mathbb{N}$ 表示所有正整數的集合。已知滿足:

$$1 \le a \le b \text{ 與 } \frac{a^2+b^2+a+b+1}{ab} \in \mathbb{N},$$

的所有正整數解 $(a,b)=(a_n,a_{n+1}),\ \forall n \in \mathbb{N}$, 其中 $a_n$ 的值由下列遞增的遞迴關係唯一決定:

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n + r.$$

試問 $(p,q,r) = \underline{(㉑, ㉒㉓, ㉔㉕)}$

5. 設 $\mathcal{S}$ 爲所有 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 的排列所成的集合。

(1) (2分) 對任一個 $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_8 \in \mathcal{S}$, 計算下列的乘積和:

$$S = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_4 + \sigma_5\sigma_6 + \sigma_7\sigma_8.$$

則對 $\mathcal{S}$ 內的所有元素, 所得的 $S$ 的算術平均數爲 $\underline{㉖㉗}$.

(2) (5分) 在 $\mathcal{S}$ 中, 滿足「對所有的 $k=1,2,\ldots,7$, $k$ 的後一個數字必定不是 $(k+1)$」的排列共有 $\underline{㉘㉙㉚㉛㉜}$ 個。

**第二部份: 非選擇題**

說明: 每題七分, 答案必須寫在「答案卷」上, 並標明題號與子題號, 同時必須寫出演算過程或理由, 否則將予扣分甚至零分。作答使用藍、黑色原子筆書寫, 且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因, 致評閱人員無法清楚辨識, 其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題前。

一、令 $a,b,c$ 爲正實數且 $k$ 爲

$$\frac{13a+13b+2c}{2a+2b} + \frac{24a-b+13c}{2b+2c} + \frac{(-a+24b+13c)}{2c+2a} \text{ 的最小值。}$$

試回答下列問題:

(1) (5分) 試求 $k$.

(2) (2分) 若最小值發生於 $(a,b,c)=(a_0,b_0,c_0)$ 時, 試求 $\dfrac{b_0}{a_0}+\dfrac{c_0}{b_0}$.

二、將三角形 $XYZ$ 的面積記爲 $[XYZ]$. 已知三角形 $ABC$ 的三邊長分別爲 $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=7$, $\overline{AB}=8$. 試回答下列問題:

(1) (3分) 設 $\triangle ABC$ 的外心爲 $O$. 試求面積比 $[OBC]:[OCA]:[OAB]$.

(2) (4分) 設 $\triangle ABC$ 的垂心爲 $H$. 試求面積比 $[HBC]:[HCA]:[HAB]$.