國立臺南家齊高級中等學校 111 學年度第一次數學科專任教師甄選初試筆試試題

一、填充題(每題 4 分，共 60 分)

1. 空間中一點 $P(4,3,1)$，$C:\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z-5)^2=13 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$，$Q\in C$，求 $\overline{PQ}$ 之最大值為________

2. 設 P 為 ΔABC 中 $\overline{BC}$ 上一點，$\overline{PB}=\overline{AC}=a$，$\angle BAP=\frac{1}{3}\angle PAC=\frac{\pi}{6}$，求 $\overline{PC}$=_______

3. 已知多項式 $f(x)=1-x^4$，若 $a,b\in R$，且 $b-a=1$，求 $\int_a^b f(x)dx$ 的最大值為_______

4. 設有一張長方形的紙 $ABCD$，已知 $\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=4$，通過對角線 $\overline{BD}$ 的中點 M 且垂直於 $\overline{BD}$ 的直線分別交 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 於 E、F 兩點，當以 $\overline{EF}$ 為折線把紙 $ABCD$ 折起來，使得平面 $AEFD$ 垂直於平面 $EBCF$，此時若 $\angle CFD=\theta$，$0<\theta<\pi$，求 $\cos\theta$=______

5. α、β 是方程式 $\begin{vmatrix} x-\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & x-\sin\theta \end{vmatrix}=0$ 之兩根，若 $n\in Z$，求 $\alpha^n+\beta^n$ 之值為_______

6. 實係數多項方程式 $f(x)=x^4+2(k-2)x^3-7(k-1)x^2+px+q=0$，已知 $2+i$ 為其複數根，另有兩根為實數，求 pq 的最小值為_______

7. ΔABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=6$，$\cos(B-C)=\frac{2}{3}$，則 $\overline{BC}$ 為__________

8. 坐標平面上，$C:x^2+y^2=1$，一定點 $A(-2,0)$，Q 為圓 C 上的動點，以 Q 為中心，將 A 點逆時針旋轉 90 度得 P 點，求動點 P 的軌跡方程式為_______

9. 雙曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 上一點 $A(-4,\sqrt{15})$，兩焦點 F_1,F_2，則 ΔPF_1F_2 的內切圓和 x 軸的切點坐標為_______

10. 試求 $y=-x^2-3x+6$ 和 $x+y-3=0$ 所圍成的區域繞 x=2 所得的旋轉體體積為_______

11. 已知 $abc \neq 0$，且 $\dfrac{2b+c}{a}=\dfrac{2c+a}{b}=\dfrac{2a+b}{c}$，試求 $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=$ ＿＿＿＿＿＿

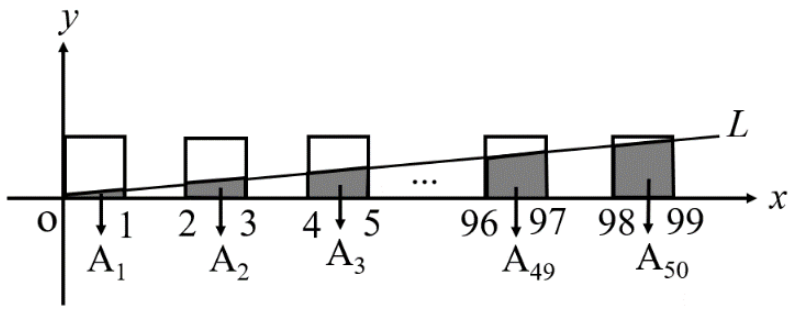
12. 將 1，2，3，4，5，6，7，8，9 共九個數字任意填入九宮格中，數字不可重複，則 5 個奇數至少有 3 個可以連成一直線（例如：下圖 2 種情形皆可）的機率為＿＿＿＿＿＿

6	2	1
7	3	4
5	8	9

1	3	5
7	2	4
9	8	6

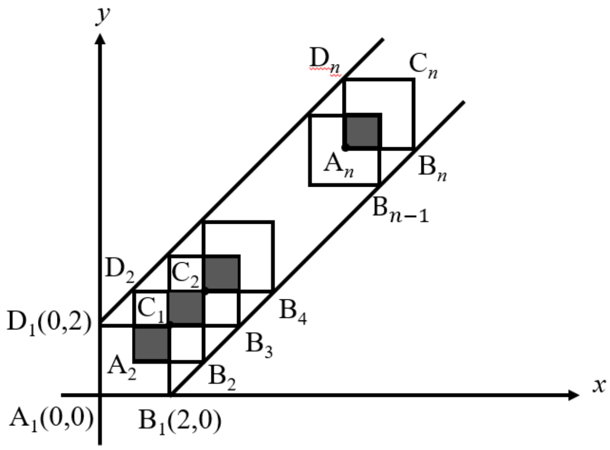
13. 已知一個圓內接八邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$，若 $\overline{P_1P_2}=\overline{P_3P_4}=\overline{P_5P_6}=\overline{P_7P_8}=3$，且 $\overline{P_2P_3}=\overline{P_4P_5}=\overline{P_6P_7}=\overline{P_8P_1}=4$，則此八邊形面積 ＝ ＿＿＿＿＿＿

14. 如下圖，在坐標平面上有 50 個邊長皆為 1 的正方形由左而右依序排列，已知直線 $L: y=\dfrac{1}{99}x$，若直線 L 與 x 軸在第 n 個正方形所圍出的灰色部分面積為 A_n，且令 $a_n=A_1+A_2+\cdots+A_n$， $x=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{49})(a_2+a_3+\cdots+a_{49}+a_{50})$，$y=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{49}+a_{50})(a_2+a_3+\cdots+a_{49})$，試求 $x-y=$ ＿＿＿＿＿＿。



15. 在坐標平面上有 n 個邊長皆為 2 的正方形，將它們依下圖方式疊排在一起，其中前後兩個正方形皆有 $\frac{1}{4}$ 部分是重疊的，第一個正方形為 $A_1B_1C_1D_1$，第二個正方形為 $A_2B_2C_2D_2$，第三個正方形為 $A_3B_3C_3D_3$，其中點 A_3 與點 C_1 是重合的，依此疊排原則得第 n 個正方形為 $A_nB_nC_nD_n$，已知 $A_1(0,0), B_1(2,0), D_1(0,2), B_n(x_n, y_n)$，求

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{y_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n}})=$____________。



二、計算題 (每題 8 分，共 40 分，請寫出詳細計算過程)

1. 考慮座標平面上的直線 $L: 2x-y=0$ 與 $M: 2x+3y=6$，若 b、c、d 為實數且二階方陣 $P=\begin{bmatrix}7 & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 所代表的線性變換將 L 變換到 L，M 變換到 M (即 L 與 M 均變換到其自身)。

   (1) 求方陣 P　　(2)求直線 L、M 與 x 軸圍成的三角形經方陣 P 變換後所得三角形面積

2. 設 $f(x)=\sqrt{x^4-9x^2-6x+34}-\sqrt{x^4-3x^2+4}$，當 $x=t$ 時，$f(x)$ 有最大值 M，試求數對 (t，M)。

3. 銳角三角形 ABC 中，試求 $\frac{\sin A}{\sin B\sin C}+\frac{\sin B}{\sin C\sin A}+\frac{\sin C}{\sin A\sin B}$ 的最小值並證明其為最小。

4. 當 $0<x<1$ 時，$x^2+ax+4\geq 0$ 恆成立，試求 a 的範圍。

5. 求 $7x^2+6y^2=5z^2$ 的整數解。