高雄女中 111 年教師甄選 數學科筆試 (記憶版)

※共 14 題計算證明題，1~12 每題 7 分，13、14 各 8 分。

1. 數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$，$\forall n\in\mathbb{N}$，試求$a_n$的一般式。

2. 設$x_1,x_2,.....,x_n$均為正實數，且$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=48$，$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2=36$，$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^3=27$，求 n。

3. 方程式$x^8+ax^4+1=0$有四個實根，且四個實根成等差數列，求 a。

4. 方程式$\left(x^2+4x+3\right)^2+k=0$ 有一正根、一負根及二虛根，試求 k 的範圍。

5. $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+\sqrt[n]{1^n+2^n}+\sqrt[n]{2^n+3^n}+.....+\sqrt[n]{(m-1)^n+m^n}}{m^2}\right]=$？

6.試求函數$y=x^2$和$y=2x+15$所圍的區域在$x=t$和$x=t+1$間面積的最大值為何？

7.設$f(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}\int_a^x(2t-1)(t-2)^2dt$，若$f(a)$的極大值為 M，極小值為 m，求數對$\left(M,n\right)$ 。

8. $\Gamma_1: y=x^2+1$和$\Gamma_2: y=-(x-1)^2$的圖形有兩條公切線且可以得到四個切點，請問此四點所圍成的四邊形面積為何？

9. ΔABC 的重心為 G，過 G 作一直線分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 P,Q ，請證明ΔAPQ 的面積至少為 ΔABC 的$\dfrac{4}{9}$ 。

10.(題目的數據太複雜，不詳，是有關矩陣的對角化)

11.$\log_2(x^2+20x)-\log_2(4x-3a-\dfrac{3}{2})=1$ 的 x 有唯一解，求 a 的範圍。

12.設$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ ，令 $a_n=3^n\cos n\theta$ ，證明 $\forall n\in\mathbb{N}$ ， a_n 必為整數且不為 3 的倍數。

13.在 ΔABC 的$\overline{AB},\overline{AC}$邊上各取一點 M,N，使得$\overline{MB}=\overline{BC}=\overline{CN}$ 。令ΔABC 的外接圓半徑、內切圓半徑分別為 R,r ，試求$\dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$ 。

14.設$x\ge y\ge z\ge w\ge 0$ ，$5x+4y+3z+6w=2013$ ，求$x+y+z+w$的最大值及最小值。