2. $-\pi < x < \pi$ 且 $x \neq 0$，求 $f(x)=\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}$ 的極大值與極小值

(SOL) $\because -\pi < X < \pi$, $X \neq 0$

令 $t=\sin X$, $t \in [-1,0) \cup (0,1]$

原式 $= f(t)=\frac{t}{2}+\frac{2}{t}=\frac{t^2+4}{2t}$

$f(t)'=\frac{t^2-4}{2t^2}$ (代微分公式)

$f(t)'=0$ 時有極值

$t=\pm 2$ 不在 $t \in [-1,0) \cup (0,1]$ 因此極值出現在區間兩端

$f(-1)=-\frac{5}{2}$

$f(1)=\frac{5}{2}$

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{t^2-4}{2t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{1+\frac{4}{t^2}}{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0^-}\frac{-8t^{-3}}{-2t^{-2}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{t\to 0^-}\frac{4}{t}=0$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2-4}{2t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1+\frac{4}{t^2}}{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-8t^{-3}}{-2t^{-2}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{4}{t}=0$$

故極大值 $\frac{5}{2}$ 極小值 $-\frac{5}{2}$