

國立台灣師範大學數學系

110 學年度大學申請入學指定項目甄試試題

筆試一 計算證明題

說明與注意事項：

- (甲) 本試卷共五題 (共一頁)，合計 100 分。
- (乙) 作答時間 120 分鐘 (下午 1:20 ~ 3:20)。
- (丙) 請將計算或證明過程依序寫在答案本上，否則不予計分。
- (丁) 交卷時答案本與本試卷一併交回。

一、已知實數 x, y, z 滿足 $9x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ 。

- (1) 10 分 試求 $3x + \sqrt{2}y + 2z$ 的最小值。
- (2) 10 分 呈上題，試求發生最小值時， x, y, z 之值。

二、20 分 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 = 2$ ，且對所有正整數 n ，滿足 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ 。
試證： $\sqrt{2} < a_{2021} < \sqrt{2} + \frac{1}{2021}$ 。

三、平面上扇形 OAB 滿足 $\overline{OA} = \overline{OB} = 5$ ，且圓心角 $\angle AOB = \theta$ 。

- (1) 15 分 若 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，試證對於任意正整數 n ， $\cos^n \theta < \frac{\sin^n \theta}{\theta^n} < 1$ 。
- (2) 5 分 若 $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ ，試證上述不等式仍然成立。

四、(1) 10 分 給定兩個複數 z_1, z_2 ，證明 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ 。

(2) 10 分 給定四個相異正整數 a, b, c 和 d ，證明至少存在兩組相異非負整數解 $\{u, v\}$ 和 $\{s, t\}$ 滿足 $u^2 + v^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = s^2 + t^2$ 。

五、將 1 到 50 的正整數填入 50×50 的格子內，使每個數恰出現五十次。

- (1) 10 分 設有 r 列出現 1，亦有 c 行出現 1，試證 $r + c \geq 15$ 。
- (2) 10 分 試證一定存在某一行或某一列，出現至少 8 個不同的數。