高雄市立高雄高級中學 111 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

（記憶版）

#每題 6 分

1. 試求 $\sum_{k=1}^{110}\frac{2022^{\frac{2k}{111}}}{2022^{\frac{k}{111}}+1}=\frac{2022^{\frac{2}{111}}}{2022^{\frac{1}{111}}+1}+\frac{2022^{\frac{4}{111}}}{2022^{\frac{2}{111}}+1}+\frac{2022^{\frac{6}{111}}}{2022^{\frac{3}{111}}+1}+\ldots+\frac{2022^{\frac{220}{111}}}{2022^{\frac{110}{111}}+1}$ 之值。

2. 坐標平面上有 $(1,-1)$, $(3,3)$, $(-k+4,k^2+k)$, $(-k^2-k+1,k-3)$ 相異四點且共圓。若 k 為整數，試求 k 之值。

3. 設 m 為實數，方程式 $x^2+m^2(x+3)^2+4x-7m(x+3)+10=0$ 可得兩相異實根 x_1,x_2，而且 $x_1x_2<0$。試求滿足此條件的 m 之最大範圍。

4. 若 $2^x=8x$ 的實數解為 x_1,x_2；$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)=x$ 的實數解為 x_3,x_4。
   試求 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 之和。

5. 實數 a,b 滿足 $a^3-3a^2+4a=3$ 且 $8b^3-12b^2+8b=1$。試求 a^3+8b^3+12ab 之值。

6. 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 2x & 3-x \\ 6-2x & 1 & 4x-4 \\ x-3 & 3-2x & 2-2x \end{vmatrix}$，若 $f(100)=9603k+r$，其中 k 為整數，且 r 為小於 9603 的非負整數，試求 r 之值。

7. 試求 $\sum_{n=1}^{2022}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}=$？

8. 投擲 3 顆公正骰子，試問其中 2 顆出現點數和為 7 的機率為何？

9. 有一矩形 $ABCD$，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=1$，將矩形沿 $\overline{BD}$ 折起，使平面 ABD 與平面 CBD 的夾角為120°，試求 $\overline{AC}=$？

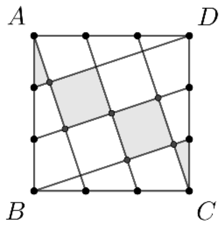
10. (1) 試敘述何謂幾何分布。

(2) 隨機變數 X 的機率分布是遵循參數為 p 之幾何分布，試求其期望值與變異數。

11. 已知三次實係數多項式 $y=f(x)$ 與其中一條直線交於相異三點 $(a,f(a))$, $(b,f(b))$, $(c,f(c))$。試證明：函數 $y=f(x)$ 的圖形反曲點坐標為 $(\frac{a+b+c}{3},f(\frac{a+b+c}{3}))$。

12. 空間中三相異平面 $E_1:a_1x+b_1y+c_1z=d_1$，$E_2:a_2x+b_2y+c_2z=d_2$，$E_3:a_3x+b_3y+c_3z=d_3$，已知此三平面兩兩交於一直線，且三交線兩兩平行。試證明 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=0$，但 $\Delta_x=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}$，$\Delta_z=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}$ 中至少有一個不為 0。

13. 有一正方形 $ABCD$，在每邊各取兩個等分點，將等分點與頂點分別連線，恰可將正方形分為 16 個部分（如右圖所示）。試求陰影部分面積占全部面積的比例為______。



14. 解方程式 $8^x+27^{\frac{1}{x}}+2^{x+1}\cdot 3^{\frac{x+1}{x}}+2^x\cdot 3^{\frac{2x+1}{x}}=125$，$x=$______。（全對才給分）

15. 已知 $H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n},\ n\geq 1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{H_{n+1}+H_{n+2}+...+H_{2n}}{nH_n}=$______。

16. 已知 $p(x)=x^2+2ax-b-1$，$q(x)=x^2+2bx-a-4$ 皆為整係數多項式，且 $p(x)=0$ 及 $q(x)=0$ 皆具有整數解。若 a,b 皆為非負整數，則數對 $(a,b)=$______。（全對才給分）

17. 若矩陣 $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 滿足：$\begin{cases}a_{1j}=a_{i1}=1\\a_{ij}=a_{i-1,j}+a_{i,j-1}\end{cases}$, $i,j>1$，我們稱為 Pascal matrix。例如：3×3 的 Pascal matrix 可寫成：$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{bmatrix}$。試證：所有的 Pascal matrix 皆為可逆矩陣。