

100 學年度南臺灣國中教師甄選命題策略聯盟【數學科】試題卷

說明：本試題卷共 50 題，均為單選題。

1. 多項式 $x^4 + x^2 + ax - 6$ 被 $x+2$ 所除的餘數是 8, a 的值為 (A) 3 (B) 4 (C) 0 (D) -4
2. 有理函數 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的圖形是 (A) 雙曲線 (B) 拋物線 (C) 一直線 (D) 一直線，但少一點(1,2)
3. 以 i 表示虛數單位， $i^2 = -1$ ，這時 $(1-i)^{20} = ?$ (A) 1024 (B) -1024 (C) 1024*i* (D) -1024*i*
4. 若 $x = \sqrt{9+2\sqrt{14}} + \sqrt{9-2\sqrt{14}}$ ，則 x^2 為 (A) 7 (B) 49 (C) 16 (D) 28
5. 設 a 是實數，且二次方程式 $x^2 + ax - 2a - 4 = 0$ 只有一實根， a 的值為 (A) 4 (B) -4 (C) 2 或 -2 (D) 3 或 -1
6. 在一次抽獎活動中，只有一個頭獎，而總共有 10 人排隊抽獎，小明排第 4 位，小明抽中頭獎的機率是
(A) $\frac{1}{40}$ (B) $\frac{1}{30}$ (C) $\frac{1}{20}$ (D) $\frac{1}{10}$
7. 空間中的兩平面，交集不可能是 (A) 一平面 (B) 一直線 (C) 一點 (D) 空集合
8. 若一正整數 P 可以表示為 $m^2 + n^2$ ，其中 m, n 也是正整數，下面哪一種情形不會發生
(A) P 可表示為 $4k$ 的形式， k 是正整數 (B) P 可表示為 $4k+1$ 的形式， k 是正整數
(C) P 可表示為 $4k+2$ 的形式， k 是正整數 (D) P 可表示為 $4k+3$ 的形式， k 是正整數
9. 在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 的範圍內， $2\cos\theta + \sin\theta$ 的最大值是 (A) 3 (B) 2 (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{5}$
10. $\log_{0.2} 625 =$ (A) 4 (B) -4 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{4}$
11. 設 a, b, c, d 是實數，且滿足 $x^3 + x^2 - 2x + 3 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 則 d 的值為 (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3
12. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$ 的值為 (A) 1 (B) 0 (C) ∞ (D) $\frac{1}{2}$
13. $x = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ，則 $x^4 - 3x^2 + 2$ 的值為 (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) $2 + \sqrt{2}$
14. 二次方程式 $x^2 - x - 5 = 0$ 的兩根為 α, β ，則 $\alpha^2 + \beta^2$ 的值為 (A) 11 (B) -9 (C) 10 (D) -11
15. 設 x, y 是實數，在 $2x + y = 3$ 的條件下， $x^2 + 2y^2$ 的最小值為 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 5
16. 設 θ 是第二象限角且 $\sin\theta = \frac{1}{3}$ ，則 $\tan\theta$ 的值為 (A) $2\sqrt{2}$ (B) $-2\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
17. 解對數方程式 $\log_3(x+1) = \log_9(5x+11)$ ，得出 x 值為 (A) -2 或 5 (B) 5 (C) -3 或 4 (D) -3
18. 給定 $\log 2 = 0.30103$ ，把 2^{1000} 表示為 10 進位的整數時，位數是 (A) 300 (B) 301 (C) 302 (D) 303
19. 設 a, b 是實數，三次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ 有一根是 $2+i$ ，則 a 的值為 (A) 3 (B) -3 (C) 2 (D) -2
20. 設 ω 是 1 的一虛立方根，則 $(1-\omega)(1-\omega^2)$ 的值為 (A) -1 (B) 1 (C) 3 (D) -3
21. 在 $0 \leq \theta < 2\pi$ 的範圍內， $f(x) = 2 - \sin\theta - \cos^2\theta$ 的最小值為 (A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$
22. 座標平面上， $\triangle ABC$ 的重心在 $G(2,4)$ ，又頂點 B, C 的座標分別為 $(2,3)$ 、 $(3,4)$ ，頂點 A 的座標是
(A) $(2,5)$ (B) $(1,5)$ (C) $(3,5)$ (D) $(4,5)$
23. 空間中，一平面通過 $A(1,0,0)$ 、 $B(0,-1,0)$ 、 $C(0,0,2)$ ，原點 $O(0,0,0)$ 到這平面的距離是
(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$
24. 正整數 504 的偶數正因數的個數為 (A) 24 (B) 18 (C) 21 (D) 20
25. 座標平面上，點 $P(2, -2\sqrt{3})$ 化成極座標為 (A) $(4, \frac{\pi}{3})$ (B) $(4, \frac{2\pi}{3})$ (C) $(4, \frac{\pi}{6})$ (D) $(4, \frac{5\pi}{3})$
26. 設 y 為 x 的可微函數，且滿足 $xy^2 + 6y + x = 0$ 。求 $\frac{dy}{dx}$ 。 (A) $\frac{1+y^2}{2xy+6}$ (B) $-\frac{1+y^2}{2xy+6}$ (C) $\frac{1-y^2}{2xy+6}$ (D) $\frac{1+y^2}{2xy-6}$
27. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ 。 (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) 2

【請翻至背面繼續作答】

28. 下列那一個函數的展開為 $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$? (A) $\ln x$ (B) $\tan x$ (C) $x \sin x$ (D) $\cos x$

29. 下列那一個函數為方程式 $y' + 4y = 3e^{2x}y^2$ 的解? (A) e^{2x} (B) e^{4x} (C) $e^{2x} + 3e^{4x}$ (D) $y = \frac{2}{3e^{2x} + 2e^{4x}}$

30. 求乘法群 $U(15) = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ (modulo 15) 中元素 7 的 order. (A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 8

31. 令 $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 求 $M^3 - 6M^2 + 12M - 7I$. (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

32. 求 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$. (A) π (B) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (C) $\sqrt{\pi}$ (D) 發散不存在

33. 令 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求最小正整數 n 使得 $M^n = 0$. (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

34. 求 $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -6 \end{pmatrix}$. (A) 18 (B) 12 (C) 9 (D) 6

35. 連續函數在下列哪一個集合上一定可以取到最小值? (A) $(-\infty, \infty)$ (B) $[0, \infty)$ (C) $(0, 1)$ (D) $[0, 1] \cup [2, 3]$

36. 求級數和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) 2

37. 改寫 $\frac{x^2 + 5x + 2}{(x+1)(x^2+1)}$ 成 $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$. 求 $A+B+C$. (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

38. 求級數和 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$. (A) $\ln 2$ (B) $\ln \pi$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi^2}{2}$

39. 下列哪一個函數為微分方程式 $x'(t) = x(1-x)$ 的解? (A) $\frac{1}{1+e^{-t}}$ (B) $\frac{1}{1+2e^{-t}}$ (C) $\frac{1}{1-2e^{-t}}$ (D) 以上皆是

40. 求點 $(1, 0, -2)$ 到平面 $x+2y+z=4$ 的最短距離。 (A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ (B) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ (C) 5 (D) $\frac{5}{6}\sqrt{6}$

41. 下列哪一點為函數 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ 的 saddle point? (A) $(-1, -1)$ (B) $(1, 1)$ (C) $(0, 0)$ (D) 以上皆是

42. 求函數 $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ 在圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上的最大值 (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 不存在

43. 求 $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$. (A) $\frac{1}{e}$ (B) $\frac{1}{1+e}$ (C) $\frac{e}{1+e}$ (D) 發散不存在

44. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{5\pi i}{n}$. (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{\pi}{5}$ (D) $\frac{2\pi}{5}$

45. 求乘積 $(4 - 6x + 7x^4)(1 + 2x + 3x^2 + \dots + 100x^{99})$ 中的 x^{97} 係數: (A) 254 (B) 256 (C) 396 (D) 468

46. 求 $\int_0^1 \tan^{-1} x dx$. (A) $\frac{\pi}{8}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$ (D) 發散不存在

47. 求 $\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)} dx$. (A) $\frac{1}{3} \ln(x^3+3x) + C$ (B) $\frac{1}{3} \ln|x^3+3x| + C$ (C) $\frac{1}{3} \ln(x^2+1) + C$ (D) $\frac{1}{3} \ln|x^2+1| + C$

48. 矩陣 $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ 可對角線化為 (A) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (D) 因為 M 不對稱, 所以不可以

對角線化

49. 求矩陣 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{99}$. (A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

50. 令 $V = \{p(x) | p(x) \text{ 為複係數多項式, 且 } \deg(p(x)) \leq 3\}$, 則 $\dim_R V$ 為 (A) 3 (B) 4 (C) 8 (D) 無法定義