110 學年度台灣省北二區(新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科口試試題

編號：______________________ (學生自填)

注意事項：

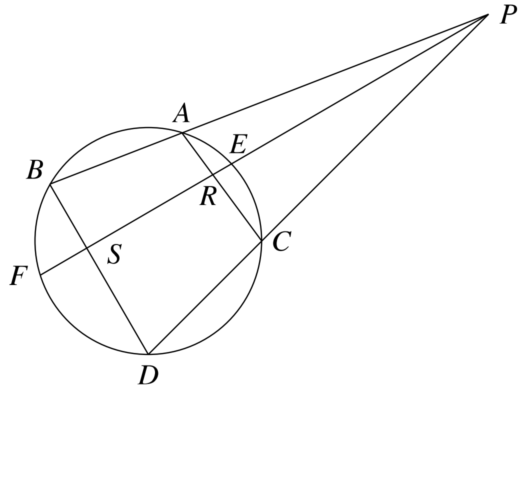
1. 本口試卷共兩題，思考時間15分鐘；參賽者可先在本試卷上作答，口試時請攜帶本試卷應試，口試答辯時間15分鐘，並繳回本試卷。
2. 本項測驗著重解題技巧、表達能力與邏輯思維，參賽者不需要太專注於計算的細節。

問題：

1. 試問由1,3,6,7,8排成數字都相異的四位數中，可以表成兩個整數的平方差之四位數共有多少個？

2. 過圓外一點 P，作圓的三條割線 PAB, PCD, PEF, 分別交圓於點 A、B、C、D、E、F。$\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 分別交 $\overline{EF}$ 於點 R、S，如圖所示。證明：

$$\frac{\overline{ER}}{\overline{PR}} \cdot \frac{\overline{PS}}{\overline{SF}} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{PE}} = 1$$



110 學年度台灣省北二區 (新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
(數學科口試參考答案)

【口試一】試問由 1,3,6,7,8 排成數字都相異的四位數中，可以表成兩個整數的平方差之四位數共有多少個？

【解】 96。

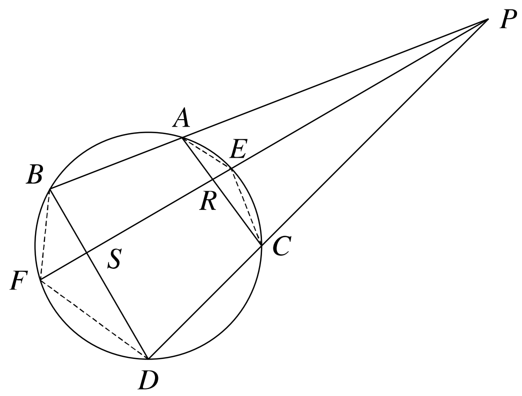
1. 由 $2k+1=(k+1)^2-k^2$，得知所有奇數都可以表示成兩個整數的平方差，此種四位數的個位數字必為 1, 3 或 7，故有 $3\times P_3^4=72$ 種。

2. 由 $4k=(2k+1)^2-(2k-1)^2$，得知所有 4 的倍數都可以表示成兩個整數的平方差，此種四位數的末二位數必為 16, 36, 76 或 68，故有 $4\times P_2^3=24$ 種。

又由 a, b 的奇偶性，可推得 a^2-b^2 必為奇數或 4 的倍數，故 $4k+2$ 的數都不能表成兩個整數的平方差。因此，所求之四位數共有 $72+24=96$ 個。 □

【口試二】過圓外一點 P，作圓的三條割線 PAB, PCD, PEF, 分別交圓於點 A、B、C、D、E、F。$\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 分別交 $\overline{EF}$ 於點 R、S，如圖所示。證明：

$$\frac{\overline{ER}}{\overline{PR}}\cdot\frac{\overline{PS}}{\overline{SF}}\cdot\frac{\overline{PF}}{\overline{PE}}=1$$



【證】

$$\frac{1}{\overline{PE}}+\frac{1}{\overline{PF}}=\frac{1}{\overline{PR}}+\frac{1}{\overline{PS}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{\overline{PE}}-\frac{1}{\overline{PR}}=\frac{1}{\overline{PS}}-\frac{1}{\overline{PF}}\quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{\overline{ER}}{\overline{PE}\cdot\overline{PR}}=\frac{\overline{FS}}{\overline{PF}\cdot\overline{PS}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\overline{ER}}{\overline{PR}}\cdot\frac{\overline{PS}}{\overline{SF}}\cdot\frac{\overline{PF}}{\overline{PE}}=1$$，此題等價於證明 $\frac{\overline{ER}}{\overline{PR}}\cdot\frac{\overline{PS}}{\overline{SF}}\cdot\frac{\overline{PF}}{\overline{PE}}=1$。

由 $\triangle PAC\sim\triangle PDB$, $\triangle PAE\sim\triangle PFB$, $\triangle PCE\sim\triangle PFD$（AA 相似），

得 $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}}, \frac{\overline{AE}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PF}}, \frac{\overline{EC}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{PE}}{\overline{PD}}$。

因此，$\frac{\overline{ER}}{\overline{PR}}\cdot\frac{\overline{PS}}{\overline{SF}}\cdot\frac{\overline{PF}}{\overline{PE}}$

$$=\frac{\triangle AEC\text{面積}}{\triangle APC\text{面積}}\cdot\frac{\triangle PBD\text{面積}}{\triangle FBD\text{面積}}\cdot\frac{\overline{PF}}{\overline{PE}}=\frac{\triangle AEC\text{面積}}{\triangle FBD\text{面積}}\cdot\frac{\triangle PBD\text{面積}}{\triangle PAC\text{面積}}\cdot\frac{\overline{PF}}{\overline{PE}}$$

$$=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{EC}\sin\angle AEC}{\overline{BF}\cdot\overline{DF}\sin\angle BFD}\cdot\frac{\overline{BD}^2}{\overline{AC}^2}\cdot\frac{\overline{PF}}{\overline{PE}}$$

$$=\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{DF}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}\cdot\frac{\overline{BD}^2}{\overline{AC}^2}\cdot\frac{\overline{PF}}{\overline{PE}}$$

$$=\frac{\overline{PA}}{\overline{PF}}\cdot\frac{\overline{PE}}{\overline{PD}}\cdot\frac{\overline{PD}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PF}}{\overline{PE}}$$

$=1$。

□