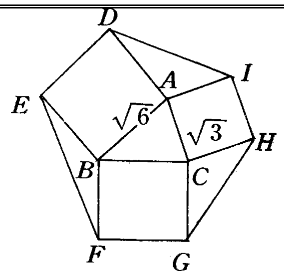
10.如下圖，△ABC 中，在各邊外側作三個正方形 $ADEB$、$BFGC$、$CHIA$ 而得六邊形 $DEFGHI$，設 $\overline{AB}=\sqrt{6}$ 、$\overline{AC}=\sqrt{3}$，則此六邊形面積的最大值 ＝____________。【100.成德高中　★★☆三角函數疊合】



【解】:

設 $\overline{BC}=x$，設 $\angle BAC=\theta$

由餘弦定理可知 $\cos\theta=\dfrac{6+3-x^2}{2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{9-x^2}{6\sqrt{2}}\Rightarrow x^2=9-6\sqrt{2}\cos\theta$

由正弦的面積公式可得知 $\Delta ABC=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin BAC$ 、$\Delta DAI=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{DA}\cdot\overline{AI}\cdot\sin DAI$

$\angle BAC+\angle DAI=180^\circ$，$\therefore$可得知 $\Delta DAI=\Delta ABC$

同理 $\Delta EBF=\Delta ABC$ 、$\Delta GCH=\Delta ABC$

六邊形的面積 $=4\Delta ABC+\square ADEB+\square BFGC+\square CHIA=4\cdot(\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\theta)+6+3+x^2$

$=6\sqrt{2}\sin\theta-6\sqrt{2}\cos\theta+18=12\sin(\theta-45^\circ)+18$

故當 $\theta=135^\circ$ 時，六邊形的面積最大，此時的面積 $=12+18=30$

11.若 12 與 13 是二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根，試求 $25a+b$ 的值。【100.成德高中　☆☆☆根與係數關係之應用】

【解】:

由根與係數關係可得知 $\dfrac{-b}{a}=25\Rightarrow b=-25a$

$\therefore 25a+b=25a-25a=0$

12.不論 n 是何正整數，$3^{4n+2}+5^{2n+1}$ 恆為正整數 P 的倍數，試求最大的 P 值，並證明你的結論。【100.成德高中　★☆☆數學歸納法】

【解】:

$n=1$ 時，$3^{4n+2}+5^{2n+1}=3^6+5^3=729+125=854=2\times7\times61$

$n=2$ 時，$3^{4n+2}+5^{2n+1}=3^{10}+5^5=59049+3125=62174=2\times7\times4441$

可猜測 $P=7$

由數學歸納法來證明 $3^{4n+2}+5^{2n+1}$ 恆為 7 的倍數

(1)當 $n=1$ 時，$3^{4n+2}+5^{2n+1}=3^6+5^3=729+125=854=2\times7\times61$ 成立

(2)若 $n=k$ 時成立，則 $3^{4k+2}+5^{2k+1}=7t$ ，$t\in N$

則 $n=k+1$ 時，$3^{4n+2}+5^{2n+1}=3^{4(k+1)+2}+5^{2(k+1)+1}=4^{(4k+2)+4}+5^{(2k+1)+2}=256\cdot4^{4k+2}+25\cdot5^{2k+1}$

$=25(4^{4k+2}+5^{2k+1})+231\cdot4^{4k+2}=25\cdot7t+7\cdot33\cdot4^{4k+2}$

為 7 的倍數，成立

由數學歸納法可得知 $3^{4n+2}+5^{2n+1}$ 恆為 7 的倍數