【第一冊】

1. 數系($\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$)

$$\Rightarrow \text{實數}(R)\begin{cases}\text{有理數 }\mathbf{Q}\begin{cases}\text{整數 }\mathbf{Z}\text{：(正整數 }\mathbf{N}\text{, 零, 負整數)}\\ \text{分數：(有限小數,循環小數)}\end{cases}\\ \text{無理數 }\mathbf{Q}^c\text{：(不循環的無限小數)}\end{cases}$$

2. 算幾不等式：$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$　　【例】若 $a,b>0$，且 $ab=6$，則 $3a+2b$ 的最小值=<u>12</u>

3. 乘法公式

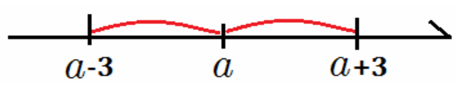
(1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=\underline{(a+b)^3-3ab(a+b)}$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

【例】若 $a+b=8$，$ab=3$，求(1) a^2+b^2　(2) a^3+b^3　　*Ans*:(1)58　(2)440

4. 絕對值：(1) $|x-a|<3 \Leftrightarrow \underline{(a-3)<x<(a+3)}$。



(2) $|x-a|\geq 3 \Leftrightarrow$ ______________。

5. 指數：(1) $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$　(2) $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$　(3) $(a^x)^y=a^{x\cdot y}$　(4) $(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x$

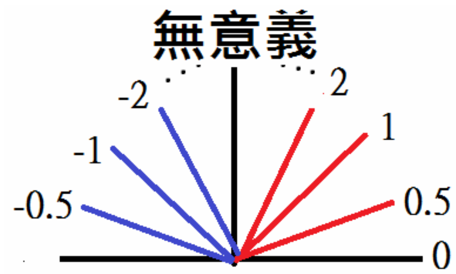
常用對數：$10^x=a \Leftrightarrow \boldsymbol{x=\log a}$　　EX：$\log10=1$，$\log100=2$，$\log1000=3$

(1) $\log1=0$　(2) $\log10^x=x$　(3) $10^{\log a}=a$　(4) $(10^m)^{\log a}=a^m$

【例 7】求值：(1) $1000^{\log 2}$　(2) $\log 100^{\frac{5}{2}}$　　*Ans*:(1)8　(2)5

6. 直線：

(1) 斜率 $\boldsymbol{m}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



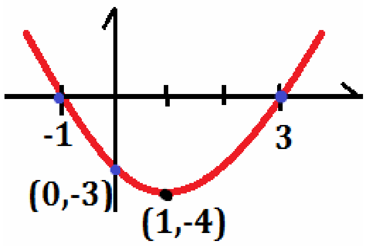
(2)**點斜式**：過 $P(x_0,y_0)$，斜率為 m 之直線 L：$\underline{y-y_0=m\cdot(x-x_0)}$

(3)**截距式**：x 軸截距 a，y 軸截距 b 之直線 L：$\underline{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$

(4)直線 $L:ax+by+c=0$，(1)若 $L_1 /\!/ L$，設 $\underline{L_1:ax+by+k=0}$

(2)若 $L_2\perp L$，設 $\underline{L_2:bx-ay+k=0}$

7. 二次函數： **例：** $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$



(1)與 x 軸交點：$\underline{(-1,0)\ ,\ (3,0)}$

(2)與 y 軸交點：$\underline{(0,-3)}$

8. (1)餘式定理：$f(x)$除以$(x-c)$的餘式 $r=f(c)$

(2)因式定理：若 $x-c$ 是 $f(x)$的因式，則 $f(c)=0$

【例】$f(x)=x^{59}+7x^{22}-4x^8+5$ 除以 $x-1$ 的餘式= $\underline{9}$

【例】求值：$12^5-7\cdot12^4-58\cdot12^3+16\cdot12^2-465\cdot12+100=\underline{280}$

9. 牛頓定理：若整係數 $x^4+ax^3+bx^2+cx+40=0$ 有四個相異正整數根，求此四根。

Ans:1,2,4,5

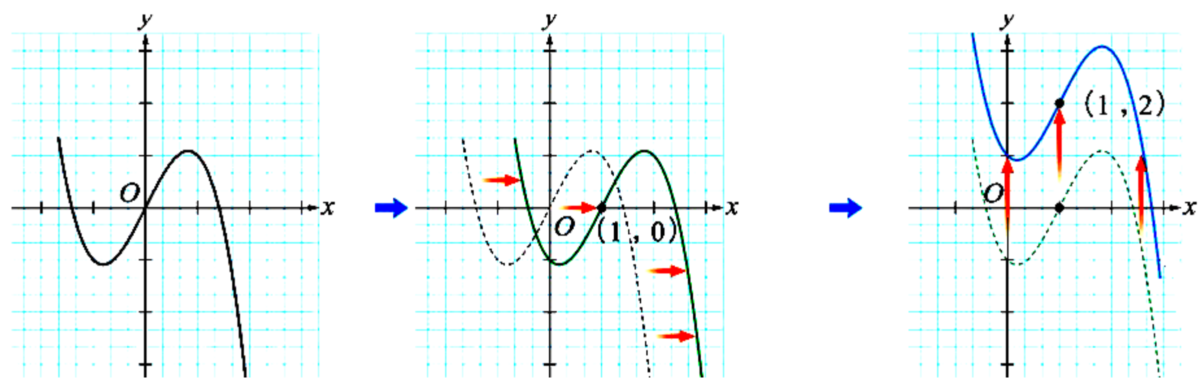
10. 不等式：(1) $x^2-4x+3\geq0$ 答：$x\geq3$，$x\leq1$ (2) $x(x-1)(x-3)(x-5)>0$ 答：$\underline{x<0},\underline{1<x<3},\underline{x>5}$

(大分)

(小連)

11. 三次函數： $y=ax^3+bx^2+cx+d=a(x+\square)^3+p(x+\square)+k$ ＜背＞ $\square=\dfrac{b}{3a}$

EX：$y=-x^3+2x \xrightarrow{\text{右移1單位}} y=-(x-1)^3+2(x-1) \xrightarrow{\text{上移 2 單位}} y=-(x-1)^3+2(x-1)+2$



【例】已知 $f(x)=2x^3+6x^2+3x-3=a(x-h)^3+p(x-h)+k$，則 $y=f(x)$ 的圖形

(1)其對稱中心為 $\underline{(-1,-2)}$ (2) 在 $x=-1$ 附近近似於直線 $\underline{y=-3x-5}$

12. 線性規劃： 最佳解(Max, min)一般出現在 $\underline{\text{端點}}$, $\underline{\text{邊界}}$

【例 1】設 $x\geq0,\ y\geq0,\ 3x+2y-12\leq0,\ x+y-2\geq0$，求下列最大值與最小值：

(1) $x-y+1$ (2) $\dfrac{y+1}{x+2}$ Ans:(1)M=5 ,m= –5 (2) M=$\dfrac{7}{2}$,m=$\dfrac{1}{6}$

13. 圓心(h,k)，半徑為 r $\Rightarrow$**圓的標準式**：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

※距離公式：點$P(\mathrm{X}_0,\mathrm{Y}_0)$，直線 $L: ax+by+c=0$ $\Rightarrow$ **距離** $d(P,L)=\dfrac{|a\cdot \mathrm{X}_0+b\cdot \mathrm{Y}_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

【例】設直線$L: x+y+k=0$，圓$C: x^2+y^2+6x+6y+10=0$，若L和圓C相切，求k值。

Ans: k =2 或 10

【第二冊】

1.遞迴數列：數列< a_{n} >中，第 n 項a_n可由前幾項表示。

(I)累加型：$a_n=a_{n-1}+f(n)$ 【例】n 條直線最多可將平面分成a_n個區域，則$a_n=\underline{\dfrac{n^2+n+2}{2}}$

(II)累積型：$a_n=f(n)\cdot a_{n-1}$ 【例】數列< a_{n} >，若$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}\cdot a_n$，求$a_{20}=\underline{\dfrac{1}{4}}$

2.等差數列：(1) $a_n=\underline{a_1+(n-1)\cdot d}$ = $\underline{a_5+(n-5)\cdot d}$

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\underline{\dfrac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}=\underline{\dfrac{[2a_1+(n-1)d]\cdot n}{2}}$

(3)若a,b,c成等差，則等差中項$b=\underline{\dfrac{a+c}{2}}$。

【例】$\langle a_n\rangle$為等差數列，其一般項$a_n=-2n+3$，首項 $a_1=\underline{1}$，公差 $d=\underline{-2}$

【例】試求級數$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+19^2-20^2+21^2$之總和。 Ans: 231

3.等比數列：

(1) $a_n=a_1\cdot r^{n-1}=a_5\cdot r^{n-5}$。

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=$ $a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+$ $a_1\cdot r^{n-1}=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

(3)若a,b,c成等比，則等比中項$\underline{b=\pm\sqrt{ac}}$。

【例】若一等比級數的首項為 3，公比為 4，和為 4095，則此級數共有多少項？ Ans: 6

4. (1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 【例】$\sum_{k=11}^{20}k^2=\underline{2485}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{10}\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{10\cdot 11}=\underline{\dfrac{10}{11}}$

【例】試求： (1) 1+3+5+7+‧‧‧‧+(2n−1) (2) 1×13 + 4×11 + 7×9 + 10×7 +⋯加至第 20 項

Ans: (1) n^2 (2) −7530

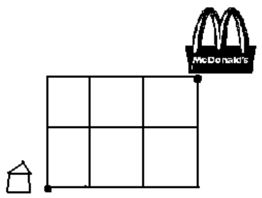
5. 計數原理：(1) **一一對應**原理 (2)**加法**、**乘法**原理 (3)**樹狀圖**

【例】有 21 支隊伍參加單淘汰籃球比賽(沒和局)。請問，共要比幾場才能產生冠軍？

Ans：20 場

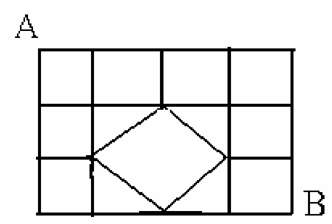
【例】小黑與 4 位同學互相傳球，若小黑傳球出去後經 4 次傳球，球又回到小黑手上，則有 <u>52</u> 種傳法。 (可畫樹狀圖求解)

6. 捷徑：



⇒ 從 到 有____種走法。

【例】由 A 走捷徑到 B，共有 <u>9</u> 種走法。



7. (1)階乘：$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$ EX：有 5 個人， A，B，C，D，E

(2)排列：$P^5_3 = 5\times4\times3$

(3)選取：$C^5_3 = \dfrac{5\times4\times3}{}$

※ $0! = P^n_0 = C^n_0 = 1$

EX： A，A，A，D，E 排一列，有$\dfrac{5!}{3!}$種。

【例】甲、乙、丙、丁、戊，共五人排成一列，求下列方法數：

(1)甲、乙相鄰 (2)甲、乙、丙相鄰 (3)甲、乙不相鄰 (4)甲在乙前方，且乙在丙前方

Ans:(1)48 (2)36 (3)72 (4)20

【例】有 5 種不同的酒，倒入 3 個酒杯，求下列方法數：

(1)杯子相同，每種酒最多倒一次：C^5_3

(2)杯子不同，每種酒最多倒一次：P^5_3

(3)杯子不同，每種酒不限倒一次：5^3

(4)杯子不同，每種酒不限倒一次，且至少一杯為啤酒：5^3-4^3(沒啤酒)

8. 二項式：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　巴斯卡三角形：

$(a+b)^2 = a^2 + \quad ab + \quad b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + \quad a^2b + \quad ab^2 + \quad b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + \quad a^3b + \quad a^2b^2 + \quad ab^3 + b^4$

※ **(1)** $(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \cdots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n$

(2) $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$

(3) $C_0^n + C_2^n + C_4^n + \cdots = C_1^n + C_3^n + C_5^n + \cdots = \dfrac{2^n}{2}$

【例】$(2x-3y)^8$ 展開式中，則 x^3y^5 的係數＝$\underline{-108864}$

9.古典機率：發生事件 A 的機率 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$　　　　　　＊$0 \le P(A) \le 1$

【例】袋中有 6 顆紅球、4 顆白球。求

(1)同時取 3 球，恰為同色的機率為$\underline{\dfrac{1}{5}}$

(2)逐一取出全部的球，紅球先被取完的機率為$\underline{\dfrac{2}{5}}$

【例】畢業旅行，甲,乙,丙,⋯等 12 人平分住三間房間，則甲,乙,丙皆不同房的機率為$\underline{\dfrac{16}{55}}$。

10. 條件機率：在發生 A 事件下，B 發生的機率

記為 $P(B\,|\,A) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(A)} = \dfrac{n(A\cap B)}{n(A)\qquad} =$

【例】擲一骰子兩次，已知兩次點數和為 8 的條件下，求

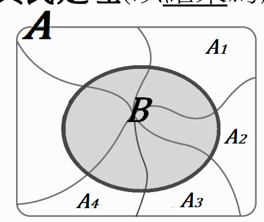
(1)其中一顆骰子為 2 點的機率為$\underline{\dfrac{2}{5}}$　　　　(2)第一次點數大於第二次點數的機率為$\underline{\dfrac{2}{5}}$

11.獨立事件：A ,B 事件彼此不相影響　⇒　$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

【例】阿杜打靶命中率為 40%，欲使靶面被打中的機率超過 0.9，那至少要打幾發？　　Ans：5 發

$(\log 2 = 0.3010,\ \log 3 = 0.4771)$

12.貝氏定理(以<u>結果</u>為前提的一種<u>條件機率</u>)



【例】甲乙丙三人射擊的命中率分別為 $\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{3}$，

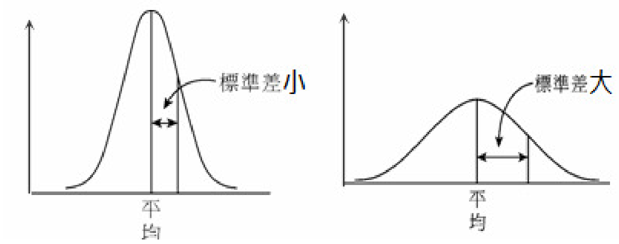
今三人向同靶各射擊一發子彈，求

(1)此靶會被射中的機率＝$\dfrac{9}{10}$

(2)靶面恰中一彈的機率＝$\dfrac{5}{12}$

(3)已知靶面恰中一彈，求其為甲射中的機率＝$\dfrac{4}{25}$

13. 標準差 $\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}{n}}$

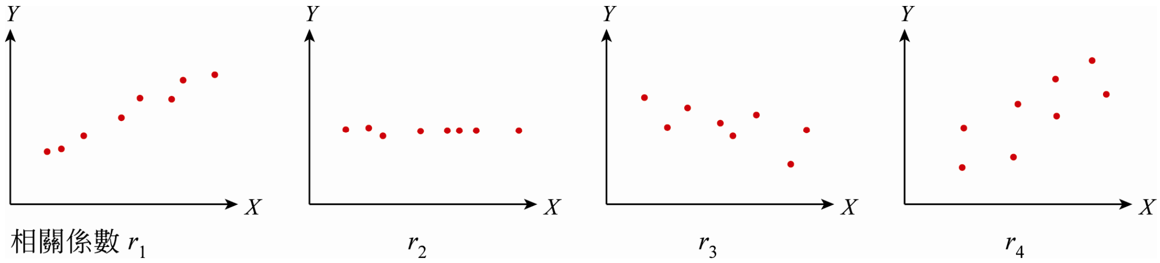


★性質：若 $y_i=ax_i+b$，則**(1)平均** $\bar{y}=a\bar{x}+b$　**(2)標準差** $\sigma_y=|a|\cdot\sigma_x$

【例】兩筆資料 X，Y 的關係為 $y_i=3x_i-2$　($i=1$，2，…，n)，已知標準差 $\sigma_x=6$，且 $\bar{y}=148$，則平均 $\bar{x}=\underline{50}$，標準差 $\sigma_y=\underline{18}$。

14. 相關係數 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}\cdot S_{yy}}}$　　※(1) $-1\le r\le 1$　　(2) $|r|$越大，相關程度越大

【例】將下列各散布圖的相關係數 r_1， r_2， r_3， r_4 由大到小排列。　　Ans： $r_1>r_4>r_2>r_3$



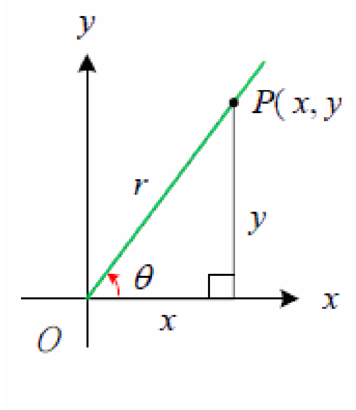
【例】二變量 X 、Y 之相關係數 $r_{X,Y}=0.7$ ，又變量 X 之算數平均數 $\overline{X}=10$，標準差 $\sigma_X=4$ ，求
(1)平均 $\overline{3X+5}$　(2)標準差 σ_{3x+5}　(3)相關係數 $r_{3X+5,\,5Y-2}$　　Ans: (1)35　(2)12 (3)0.7

15. 迴歸直線 L： $\underline{y-\bar{y}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\cdot(x-\bar{x})}$　　※(1)直線 L 過 $\underline{(\bar{x},\bar{y})}$　(2)斜率 $m=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

【例】紙張的張力強度 Y (磅/平方英吋)和所含硬木比例 X (百分比)關係的實驗，得到如下 5 組數據：
求(1)相關係數　(2) Y 對 X 的迴歸直線方程式　　Ans：(1)0.725　(2) $y-30=\frac{290}{100}(x-8)$

X	3	4	7	11	15
Y	5	40	15	35	55

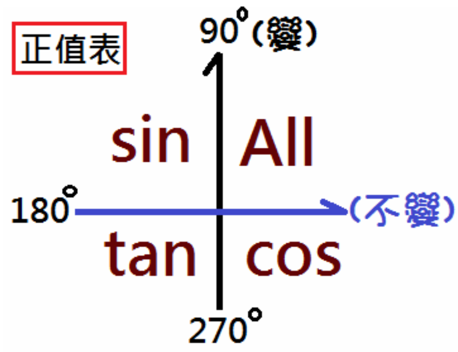
16. 三角函數：



$\sin\theta = \dfrac{對}{斜} = \dfrac{y}{r}$

$\cos\theta = \dfrac{鄰}{斜} = \dfrac{x}{r}$

$\tan\theta = \dfrac{對}{鄰} = \dfrac{y}{x}$(斜率)



【例】完成下表：

	30°	45°	60°
sin			
cos			
tan			
cot			

【例】求值

(1) $\sin 120^\circ =$ ________　　(2) $\sin 1050^\circ =$ ________

$\cos 120^\circ =$ ________　　$\cos 1050^\circ =$ ________

$\tan 120^\circ =$ ________　　$\tan 1050^\circ =$ ________

Ans: (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2};-\sqrt{3}$　(2) $-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

17. (1) π(弧度)＝180°　(2) 1(弧度)≒57.3°　【例】$\sin\dfrac{\pi}{3} = \sin 60^\circ =$

18. θ 的同界角＝ $\theta \pm 360^\circ 360^\circ \cdot n$ ＝ $\theta \pm 2\pi \cdot n$

【例】若 950^0 的最大負同界角為 a 及最小正同界角為 b，求 $(a,b) = (-130^0, 230^0)$

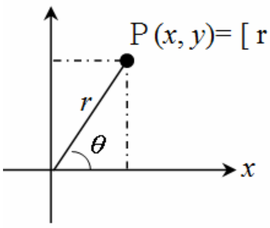
19. 平方關係： $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　$\Rightarrow (\sin\theta \pm \cos\theta)^2 = 1 \pm 2\sin\theta\cos\theta$

【例】若 $0^\circ < \theta < 90^\circ$，$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{2}$，求 $\sin\theta\cos\theta = \underline{\dfrac{3}{8}}$

20. 直角坐標 P(x, y) ⇔ 極坐標 P[r, θ]

(1) $P(x,y) = [r,\theta]$，其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

(2) $P[r,\theta] = (x,y)$，其中 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$



【例】$\left(-1,\sqrt{3}\right) = \underline{[2,120^\circ]}$

【例】$[3,-90^\circ] = \underline{(0,-3)}$

21. (1)正弦定理： $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

(2)餘弦定理： $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$

(3)面積 $\Delta = \dfrac{1}{2}ah = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{abc}{4R} = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

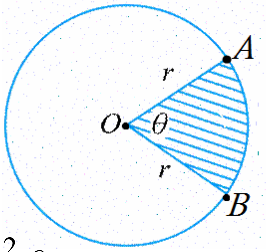
【例】ΔABC，三邊長為 a,b,c，若 $a-2b+c=0$，且 $3a+b-2c=0$，則 $\sin A : \sin B : \sin C =$ $\underline{\ 3:5:7\ }$

【例】ΔABC 三邊 $a=4$，$b=6$，$c=8$，求 ΔABC 的(1)面積　(2)高 h_c　(3)cosA　(4)內切圓半徑 r

Ans: (1) $3\sqrt{15}$　(2) $\dfrac{3}{4}\sqrt{15}$　(3) $\dfrac{7}{8}$　(4) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

【第三冊】

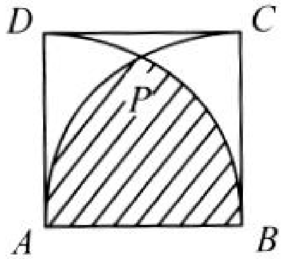
1.扇形：



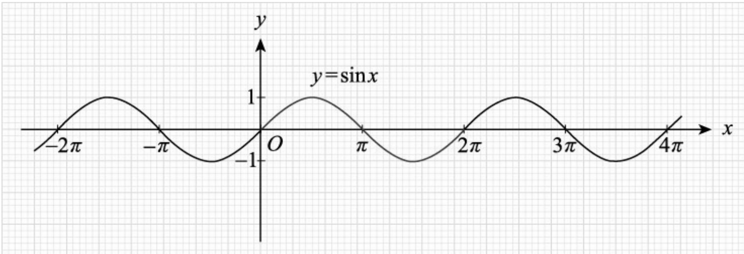
(1) 弧長 $\overset{\frown}{AB}=r\theta$

(2) 扇形 AOB 面積 $=\frac{1}{2}r^2\theta$

【例】邊長為 1 的正方形 $ABCD$，分別以 A,B 為圓心，半徑為 1 畫弧。則斜線面積＝$\underline{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}}$



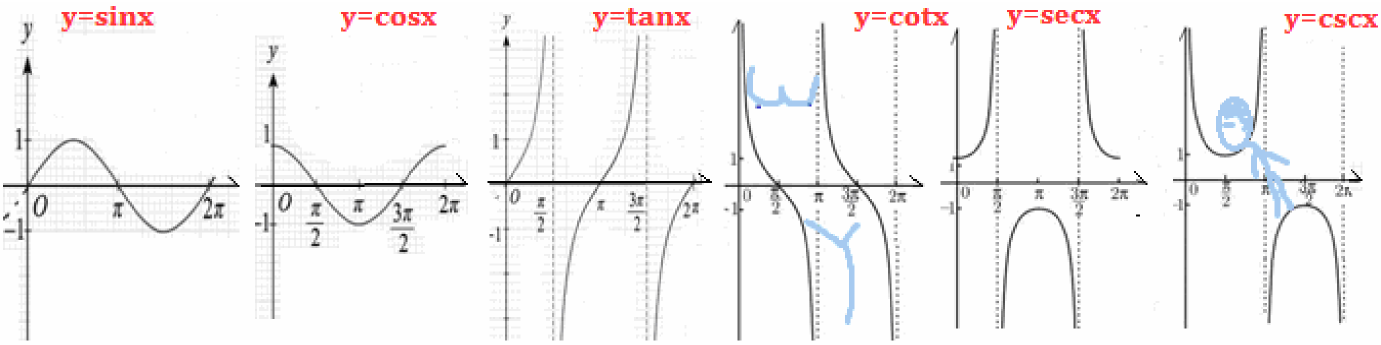
2. 正弦 sin 函數的圖形



※ $y=a\cdot\sin(k\cdot x+b)+C$

振幅　週期　左右移　上下移

※三角函數圖形：波浪經過狹谷變成河川，河川上有個女人，難過擺著哭臉，女生一哭二鬧三上吊



【例】方程式 $\sin x=\log x$ 有幾個相異實根？　*Ans*: 3 個

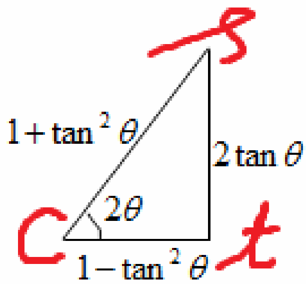
3. 和角公式：(1) $\cos(A\pm B)=\cos A\cdot\cos B\mp\sin A\cdot\sin B$　(同名異號)

(2) $\sin(A\pm B)=\sin A\cdot\cos B\pm\cos A\cdot\sin B$　(異名同號)

(3) $\tan(A\pm B)=\dfrac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\cdot\tan B}$

倍角：(1) $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

(2) $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\underline{2\cos^2\theta-1}=\underline{1-2\sin^2\theta}=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$



4. 正餘弦疊合： $-\sqrt{a^2+b^2}+c\ \le\ a\sin\theta+b\cos\theta+c\ \le\ \sqrt{a^2+b^2}+c$

【例】$f(\theta)=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta-7$ 的最小值＝$\underline{-9}$。

5. (1)負指數：$a^{-n}=\dfrac{1}{a^{n}}$　　　　(2)分數指數：設 $a>0$ ，則 $a^{\frac{1}{n}}=\underline{\sqrt[n]{a}}$

【例】設 $a>0$，$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=2$，求 $a+a^{-1}=$ $\underline{\ 6\ }$

【例】$0\le x\le 2$，求 $f(x)=-9^{x}+2\times3^{x+1}+3$ 的最大值＝12，最小值＝$\underline{-24}$

6. 對數定義：$a^{x}=b \Leftrightarrow$　$\boldsymbol{x=\log_a b}$　　　　*PS*：底數 $a>0$，$a\neq1$；真數 $b>0$

EX：(1) $\log_2 8=3$　(2) $\log_3\dfrac{1}{9}=-2$　(3) $\log100=2$　(4) $\log_1 2$ 無意義　(5) $\log_2(-4)$ 無意義

※對數公式：

(1) $\log_a x+\log_a y=\log_a xy$　　　　【例】求 $2\log\dfrac{5}{3}+2\log3+\dfrac{1}{2}\log49-\log\dfrac{7}{4}=$ $\underline{\ 2\ }$

(2) $\log_a x-\log_a y=\log_a\dfrac{x}{y}$　　　　【例】$\log_2\sqrt{2}+\log_2 2\sqrt[3]{4}=\underline{\dfrac{13}{6}}$

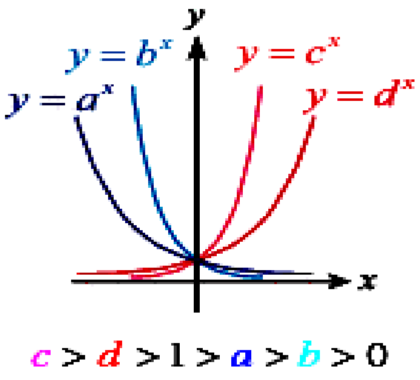
(3) $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$　　　　【例】解 $\log x-6\log_x 10=1$　Ans: $x=1000$ *or* $\dfrac{1}{100}$

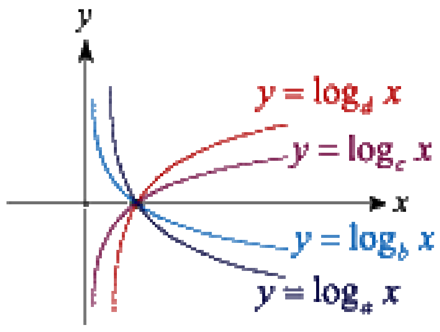
(4) $\log_a b=\dfrac{\log_x b}{\log_x a}$

(5) $a^{\log_a x}=x$

【例】某甲向銀行貸款 100 萬元，約定從次月開始每月還給銀行 1 萬元，依月利率 0.6%複利計算，則某甲需要＿＿＿＿＿年就可還清（$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}1.006=0.0026$）　答案：13

7.圖型：(1)指數 $f(x)=a^{x}$　　　　(2)對數 $\boldsymbol{f(x)=\log_a x}$





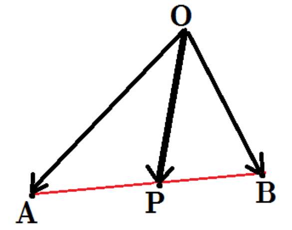
8.首數、尾數：$\log A=\log(a\times10^{n})=n+\log a\Rightarrow$ 其首數=n ，尾數=$\log a$

(1) A 為 n 位數$\Rightarrow$ $\log A$ 首數＝$\underline{n-1}$　　(2) A 為小數點後第 n 位不為 $0\Rightarrow$ $\log A$ 首數＝$\underline{-n}$

※ $\log A$ 與 $\log B$ 尾數相同 $\Leftrightarrow A=B\times10^{n}$

【例】$1+2+2^2+\dots\dots+2^{99}$ 為$\underline{\ 31\ }$位數

9. 向量加減法：(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ (**後－前**)



10. 向量 $\overrightarrow{OP}=\alpha\cdot\overrightarrow{OA}+\beta\cdot\overrightarrow{OB}$，若 P,A,B 共線 $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta=1$

※若 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\cdot\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\cdot\overrightarrow{OB}$

【例】若 P 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=5:3$，則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{OB}$

11. 若 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$，則內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$

※(1) $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$ **(2)** $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

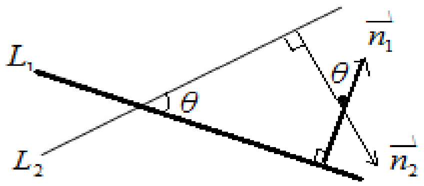
【例】設△ABC 的三頂點坐標分別為 A（1，1），B（8，2），C（4，5），求∠A＝45°

12. 柯西：$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\geq(x_1x_2+y_1y_2)^2$

【例】設 $2x+y=10$，求 x^2+y^2 的最小值, 及此時 (x,y) 之值。 Ans:20 ,(4,2)

13. 法向量 $\overrightarrow{n}$：直線 $3x+4y-7=0$ 之法向量 $\overrightarrow{n}=$ (3,4)

※直線 L_1 與 L_2 的夾角 $\theta=\overrightarrow{n_1}$ 與 $\overrightarrow{n_2}$ 的夾角 θ



【例】求 $L_1: x-2y+4=0$ 與 $L_2: x+3y+3=0$ 所夾之銳角 θ 為 45 度

14. 行列式: $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}=ay-bx$ 【例】若 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=6$，求(1) $\begin{vmatrix} 4a-3b & 6b \\ 4c-3d & 6d \end{vmatrix}=$144 (2) $\begin{vmatrix} 7a & 3b \\ 14c & 6d \end{vmatrix}=$252

性質：(1) 行 ⇔ 列，值不變 (2) 行 ⇔ 行，值變號 ；列 ⇔ 列，值變號
(3) 可提公因數 (4)成比例，值=0

(5) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ x & y \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ x & y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ x & y \end{vmatrix}$

15.方程組的解與克拉瑪公式：

方程組：$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

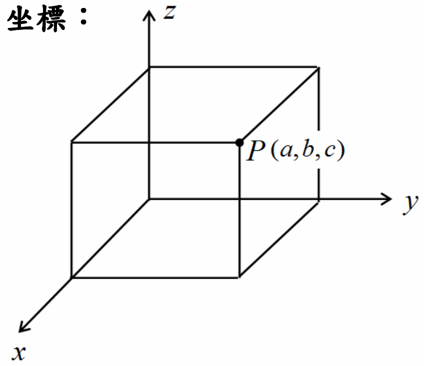
1、若 $\Delta\neq0$，則方程組恰有一組解，其解為 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

2、若 $\Delta=0$，但 Δ_x，Δ_y 至少有一個不為 0，則方程組無解

3、若 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ 時，方程組無限多組解

【第四冊】

1. 空間坐標：

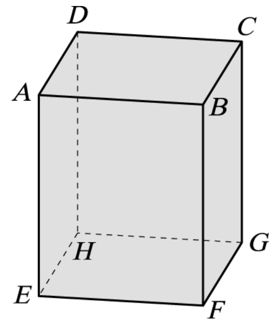


(1) $\overline{OP}$ 距離＝____________

(2) P 點對 y 軸の距離＝____________

(3) P 點對 xy 平面の距離＝____________

【例】長方體盒子 $ABCD-EFGH$，其中 $\overline{AE}=5$，$\overline{AB}=3$，$\overline{AD}=1$，試求：



(1) 一隻蜜蜂從 A 點飛到 G 點，其飛行所經最短距離＝$\underline{\sqrt{35}}$

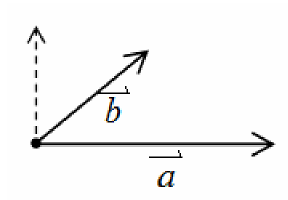
(2) 一隻螞蟻從 F 點爬到 D 點，其爬行所經最短距離＝$\underline{\sqrt{41}}$

2. 外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$： 設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$

則 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)=\begin{matrix} a_1 \\ b_1 \end{matrix}\Bigg)\begin{matrix} a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{matrix}\Bigg(\begin{matrix} a_3 \\ b_3 \end{matrix}$ …為一**向量**

性質：**(I)** 方向：$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{a}$，且 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{b}$

(II) 大小：$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張▱面積



【例】空間中三點 $A(1,2,3)$, $B(5,6,5)$, $C(5,3,2)$，則△ABC 面積＝$\underline{9}$

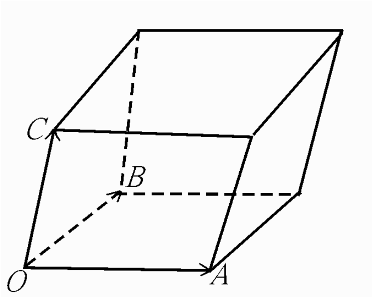
3. 三階行列式：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3c_2b_1)-(c_1b_2a_3+c_2b_3a_1+c_3a_2b_1)$

※運算化簡與二階相同

※降階：可依某一行（列）降成二階：　　PS：其＋－表：$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

EX：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ （例如依第二行展開）

4. 平行六面體：若 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$，



則(1) $V=|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|=|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}|$

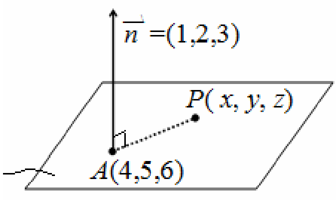
(2) $V_{OABC}=\frac{1}{6}V$　　　※O,A,B,C 共面 $\Leftrightarrow$ $V=0$

【例】空間中四點 $A(3,-1,1),\ B(0,1,-1),\ C(-1,0,1),\ D(1,-1,0)$，則四面體 $A\text{–}BCD$ 的體積＝$\underline{\frac{3}{2}}$

【例】已知 $a^2+b^2+c^2=6$，則 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的最大值＝$\underline{\ 24\ }$

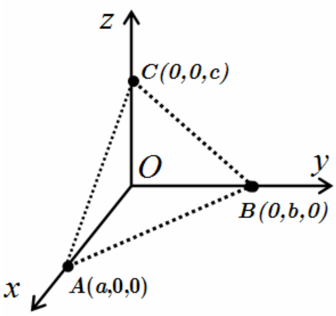
5.. 空間中：**平面** $E: ax+by+cz+d=0$ **的法向量** $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$

【例】平面 $E: 1x+2y+3z-32=0$



6. 平面 E_{ABC} 的截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

※ 四面體體積 $V_{OABC}=\frac{1}{6}|abc|$



【例】平面 E 在 x, y, z 軸之截距分別為 6,–3, 2，則平面 E 的方程式為 $\underline{\frac{x}{6}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{2}=1}$

7. 距離公式：

※平面中：(1)點 $P(X_0,Y_0)$，直線 $L: ax+by+c=0$　$\Rightarrow$ **距離** $d(P,L)=\frac{|a\cdot X_0+b\cdot Y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

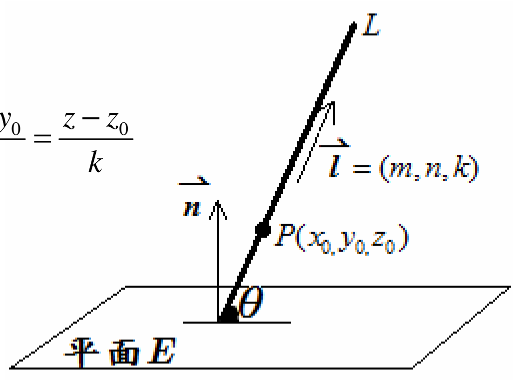
(2)兩平行線 $\begin{cases} L_1: ax+by+c_1=0 \\ L_2: ax+by+c_2=0 \end{cases}$　$\Rightarrow$ **距離** $d(L_1,L_2)=\frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

※空間中：(1)點 $P(X_0,Y_0,Z_0)$，平面 E: $ax+by+cz+d=0 \Rightarrow$ **距離** $d(P,E)=\frac{|a\cdot X_0+b\cdot Y_0+c\cdot Z_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

(2)兩平行面 $\begin{cases} E_1: ax+by+cz+d_1=0 \\ E_2: ax+by+cz+d_2=0 \end{cases}$　$\Rightarrow$ **距離** $d(E_1,E_2)=\frac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

【例】點 A(3, 4, k)與平面 $E: 2x-2y+z=-4$ 距離為 4 單位，則 k＝$\underline{10\text{或}-14}$

8. 空間中的直線：找(1)點 $P(x_0, y_0, z_0)$　**(2)方向向量** $\overrightarrow{l}=(m,n,k)$



$\Rightarrow$直線 L **參數式**: $\begin{cases} x = x_0 + m\cdot t \\ y = y_0 + n\cdot t \\ z = z_0 + k\cdot t \end{cases}$　或 L **比例式**: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{k}$

※<u>直線 L</u> 與<u>平面 E</u> 夾角 $\theta=$ **90°－(** $\overrightarrow{l}$ 與 $\overrightarrow{n}$ 夾角**)**

【例】若直線 $L:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ 落在平面 $ax+by+3z=4$ 上，則數對 $(a,b)=$ <u>$(-\frac{1}{3},1)$</u>

9. 矩陣(直行，橫列)：

例如： $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{2\times3}$ 的階數為 2 列 3 行

例如：零矩陣：每個元皆為 0，例：$\underline{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2}$

例如：二階**單位方陣** $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

10.增廣矩陣：　$\boxed{\text{聯立方程式}}$　　　$\boxed{\text{增廣矩陣}}$

$$\begin{cases} x+3y-6z=23 \\ 2x+4y+z=5 \\ 3x+y-2z=13 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 23 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 13 \end{array}\right]$$

【例】下列哪些增廣矩陣所表示的一次方程組恰有一組解？　　Ans：(A)(B)(D)

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. 矩陣乘法：$A=[a_{ij}]_{m\times}$ ，$B=[b_{ij}]$ $_{\times p}$，AB 才有意義。

說明：$AB=C=[c_{ij}]$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

【例】設 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$，求(1)$AB=$ <u>$\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$</u>　(2)$BA=$ <u>$\begin{bmatrix} 1 & -10 & 10 \\ 4 & 8 & -2 \\ 6 & 20 & -10 \end{bmatrix}$</u>

【例】$A=\begin{bmatrix}3&1\\6&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-1&3\\3&-9\end{bmatrix}$，求 $AB=\underline{0}$

【例】$A=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4&0\\1&2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}4&0\\5&1\end{bmatrix}$，求 (1) AB　(2) AC　　Ans:(1)$\begin{bmatrix}8&0\\0&0\end{bmatrix}$ (2)$\begin{bmatrix}8&0\\0&0\end{bmatrix}$

12. 矩陣性質：

(1) $AB=0$，則 $\underline{A=0}$ or $\underline{B=0}$ 不一定成立

(2) $AB=AC$，則 $B=C$ 不一定成立

(3) 因為 $AB\neq BA$，所以 [I] $(A-B)(A+B)\neq A^2-B^2$

[II] $(A\pm B)^2\neq A^2\pm 2AB+B^2$

[III] $(A+B)^n\neq C_0^nA^n+C_1^nA^{n-1}B+C_2^nA^{n-2}B^2+\cdots+C_n^nB^n$

13. 二階反矩陣：若方陣 A 的 $\det(A)\neq 0$，則存在唯一**乘法反矩陣** A^{-1}，使得 $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n$。

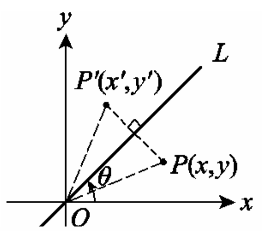
※反矩陣公式：$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，$\det(A)=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$ $\Rightarrow$ $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

【例】求 $A=\begin{bmatrix}2&7\\1&3\end{bmatrix}$ 的反矩陣 $A^{-1}=\underline{\begin{bmatrix}-3&7\\1&-2\end{bmatrix}}$

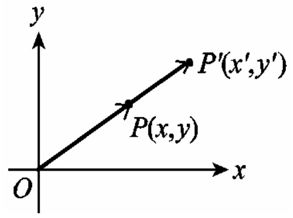
14.線性變換：點 $P(x,y)$，經 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 線性變換後得 $P'(x',y')$ $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ $\Rightarrow\begin{cases}x'=ax+by\\y'=cx+dy\end{cases}$

(1)旋轉：$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ 以原點為中心，**逆時針**旋轉 θ

(2)鏡射：$\begin{bmatrix}\cos2\theta&\sin2\theta\\\sin2\theta&-\cos2\theta\end{bmatrix}$ 對與 x 軸夾 θ 的直線 L 鏡射



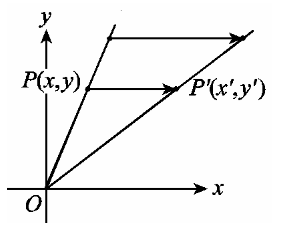
(3)伸縮：若 $\overline{OP'}=k\cdot\overline{OP}$，則 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k&0\\0&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$



(4)推移：

(1) $P(x,y)\xrightarrow{\text{沿 } x \text{ 軸，作 } ky \text{ 倍的推移}}P(x',y')=(x+ky\ ,\ y)$

則 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+ky\\y\end{bmatrix}$



(2) $P(x,y)\xrightarrow{\text{沿 } y \text{ 軸，作 } kx \text{ 倍的推移}}P(x',y')=(x\ ,\ y+kx)$

則 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\kx+y\end{bmatrix}$

【例】已知$A=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$，求$A^6=\underline{\begin{bmatrix}64 & 0\\ 0 & 64\end{bmatrix}}$

15. 若$M=\begin{bmatrix}A & X\\ B & Y\end{bmatrix}$為**轉移矩陣**，則(1) $0\le A,B,X,Y\le 1$　(2) $\underline{A+B=1}$ 且 $\underline{X+Y=1}$

※馬可夫—轉移矩陣：用來計算重複試驗的**機率**，是否最終呈穩定狀態。

【例】若甲生今天**有算**數學，則明天有 40% 會算數學；
若甲生今天**沒算**數學，則明天有 70% 會算數學。

其**轉移矩陣**$M=\begin{bmatrix}\frac{4}{10} & \frac{7}{10}\\ \frac{6}{10} & \frac{3}{10}\end{bmatrix}$；**長期而言**，甲生當天算數學的機率為$\underline{\frac{7}{13}}$