

Q: $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, 計算 $A = ?$

A: 作用在右邊 $A^2 = A^5(A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}, (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = A^3(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

若是作用在左邊 $A^2 = (A^3)^{-1}A^5 = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = (A^2)^{-1}A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

若繼續算下去 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, (A^{-1})^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 則和上面算的 $(A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 矛盾

\Rightarrow 再繼續由 A 算下去, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 和題目所給的 $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 矛盾

想要問的是由右邊作用得到的 $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$, 由右邊作用得到的 $A^2 = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ 矛盾