國立蘭陽女子高級中學１１０學年度第一次教師甄試筆試數學科試題

一、單選（三題）：每題４分，共１２分

１、求值 $2x+2\log(2+10^{-x})-\log(\frac{1}{4}+10^{x}+10^{2x})=$ (1) 2×10^{x} (2) $x^{\log\frac{1}{4}}$ (3) 1 (4) 2log2 (5) $2x+10^{2x}$

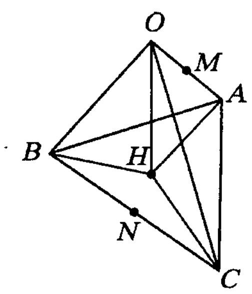
２、求 C^{100}_{50} 的質因數有幾個？(1)15 個 (2)16 個 (3)17 個 (4)18 個 (5)19 個。

３、一直線道路上有甲乙丙丁四輛車，各自以等速率行駛。上午七點前，甲乙丙同向行駛，且甲在乙後、乙在丙後，丁從遠處駛來。上午七點點，甲追上乙 。上午九點，甲追上丙 。中午十二點，甲遇到丁 。下午一點，乙遇上丁 。下午一點半，丙遇上丁 。則乙追上丙時的時間為？ (1) 上午九點半 (2) 上午十點 (3) 上午十點半 (4) 上午十一點 (5) 上午十一點半

二、多重選擇題（四題）：每題５分，共２０分

４、 以下那些選項裡的數可以整除 $2^{48}-1$ ？
(1) 61 (2) 63 (3) 65 (4) 67 (5) 69

５、有一四面體 $OABC$，它的一個底面 ABC 是邊長為 6 的正三角形，且知 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=5$， M、N 分別為 $\overline{OA}$、$\overline{BC}$ 之中點，H 為 O 在平面 ABC 上的投影點，試問下列選項哪些為真？



(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$
(2) $\overline{MN}$ 為直線 OA 和直線 BC 的公垂線
(3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{ON}=7$
(4) $\triangle OAN$ 為鈍角三角形
(5) $\overrightarrow{OA}$ 在平面 ABC 上的正射影長為 $2\sqrt{3}$

６、方程式 $2^{x-a}+b=2^{x}$，其中 a 與 b 為非零的實數，請選出可能的正確選項。
(1)若 $a>0$ 且 $b>0$ 則此方程式有實根 (2)若 $a>0$ 且 $b<0$ 則此方程式有實根
(3)若 $a<0$ 且 $b>0$ 則此方程式有實根 (4)若 $a<0$ 且 $b<0$ 則此方程式有實根
(5)若此方程式有實根，則實根必只有一個

7、設 $f: R \to R$ 為一個函數且 x_0 為實數，試問下列哪些選項是正確的？

(1)若 $f(x_0)$為極值，則 $f'(x_0) = 0$

(2)若 $f'(x_0)$存在，則 f 在 $x = x_0$ 必連續

(3)若 f 在 $x = x_0$ 連續，則 $f'(x_0)$存在

(4)設 $f(x) = x^2$，則 $f(x)$在 $x = 0$ 處的切線為 x 軸

(5)設 $f(x) = |x^2-3x|$，則 $f(x)$在 $x = 3$ 處的切線為 x 軸

三、選填題（十題）：依大學學測選填題模式作答，每題４分，共４０分

A、$(7242409)^{10}$除以 101×102 的餘數為何？答： ⑧⑨⑩⑪ 。

B、有 9 名小學生的年齡分別為 $x_1, x_2, \cdots, x_9$，其中位數 7，算術平均數為 10，標準差為 5．

則 $f(x) = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \cdots + (x_9 - x)^2$ 的最小值為 ⑫⑬⑭ 。

C、已知一數列$\langle a_n\rangle$，其中 $a_n = n^3 + 2n^2 - 200n$，n 為正整數，則 $\sum_{n=1}^{20}|a_n| =$ ⑮⑯⑰⑱⑲ 。

D、在坐標平面上，考慮二階方陣 $A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$所定義的線性變換。對於平面上異於原點$O$的點$P_1$，設$P_1$經$A$變換成 P_2，P_2經A變換成P_3。假設P_1是圖形$y=\frac{1}{10}x^2-10$上的動點，試求$\triangle P_1P_2P_3$面積的最小可能值 ⑳ 。

E、已知四邊形 ABCD 中，$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$，$\angle A = 54°$，$\angle B = 108°$，$\angle C$為鈍角，問：$\angle C =$ ㉑㉒㉓ 度。

F、$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=9$，$\overline{AC}=8$，$\angle A = 40°$，$D\in\overline{AB}$，$E\in\overline{AC}$，$\overline{DE}$把$\triangle ABC$面積平分，若$\overline{DE}$最短，求$\overline{AD} =$ ㉔ 。

G、以 O 表坐標平面的原點，給定一點 $A(4\ ,3)$，而點 $B(x\ ,0)$在正 x 軸上變動。若 $l(x)$表 $\overline{AB}$ 長,則$\triangle OAB$ 中兩邊長比值 $\dfrac{x}{l(x)}$ 的最大值為 $\dfrac{㉕}{㉖}$ 。（化成最簡分數）

H、若1,2,3,4,..99998,99999,100000 這十萬個正整數中，各位數字和不大於 10 的正整數有 k 個，例如：3211 就是其中一個，因為$3+2+1+1=7\leq 10$。試求 k 的值= ㉗㉘㉙㉚ 。

I、下表中，各行與各列均成等差數列，則第 20 行第 20 列的數字為 ㉛㉜㉝

3	5	7	9	11	13	15	17	19	⋯
4	7	10	13	16	19	22	25	28	⋯
5	9	13	17	21	25	29	33	37	⋯
6	11	16	21	26	31	36	41	46	⋯
7	13	19	25	31	37	43	49	55	⋯
8	15	22	29	36	43	50	57	64	⋯
9	17	25	33	41	49	57	65	73	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

J、求圓 $C：x^2+(y-3)^2=4$ 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積（這個旋轉體的形狀像輪胎或甜甜圈）

為 ㉞㉟ π^2