國立嘉義高級中學 110 學年度第 1 次教師甄選－數學科　解答

一、 填充題(共 10 題。每題 8 分，共 80 分)

1	2	3	4	5
265	$2^8\cdot3^2\cdot7^2\cdot31$	$2^{4/3}\cdot3^{3/2}$	2	$10\sqrt{15}$ 公尺
6	7	8	9	10
$\dfrac{8}{9}$	26	$\dfrac{7}{8}\cdot3^{50}+\dfrac{1}{8}$	1	$10\sqrt{5}$

1. 設 A_i 表示“編號 i 的球放進編號 i 的箱子中”的所有放球方式所成的集合，由此可得：每個箱子與其中的球編號皆相異的放球方法數可表示成

$$6!-\left|\bigcup_{i=1}^{6}A_i\right|$$

以下計算 $\left|\bigcup_{i=1}^{6}A_i\right|$，利用取捨原理：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{6}A_i\right|=\sum_{i=1}^{6}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots-\left|\bigcap_{i=1}^{6}A_i\right|$$
$$=C_1^6 5!-C_2^6 4!+C_3^6 3!-C_4^6 2!+C_5^6 1!-C_6^6 0!$$
$$=6!\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}\right)$$

所以題目所求 $=6!\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{6!}\right)$

$=265$

2. 因為 $1314588=2^2\cdot3\cdot11\cdot23\cdot433$

其中 2、3、11、23、433 皆為質數

所以

$$N=(1+2+2^2)(1+3)(1+11)(1+23)(1+433)$$
$$=7\cdot4\cdot12\cdot24\cdot434$$
$$=2^8\cdot3^2\cdot7^2\cdot31$$

3. 利用算幾不等式：

$$11=a+b^2+c^3$$

$$=\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{a}{6}+\frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{3}+\frac{b^2}{3}+\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2}$$

$$\geq 11\cdot\left[\left(\frac{a}{6}\right)^6\left(\frac{b^2}{3}\right)^3\left(\frac{c^3}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{11}}$$

可得

$$a^6b^6c^6 \leq 6^6\cdot 3^3\cdot 2^2 = 2^8\cdot 3^9$$

進而得

$$abc \leq \left(2^8\cdot 3^9\right)^{1/6} = 2^{4/3}\cdot 3^{3/2}$$

其中等號成立於

$$\frac{a}{6}=\frac{b^2}{3}=\frac{c^3}{2}=1$$

故 abc 的最大值為 $2^{4/3}\cdot 3^{3/2}$

4. 令 $f(1)=f(4)=c\neq f(2)=f(3)=d$

設 $f(x)=(x-1)(x-4)h(x)+c$

於是

$$f(2)=-2h(2)+c=d$$
$$f(3)=-2h(3)+c=d$$

可知 $h(2)=h(3)=\dfrac{c-d}{2}\neq 0$

此時 $h(x)$ 的最低次數為 0 次

即 $h(x)=\dfrac{c-d}{2}\neq 0$

因此 $f(x)$ 的最低次數為 2。

5. 設樓高為 x 公尺，設樓底部為 D，於是由題設可知

$$\overline{AD} = x\cot 30^o = \sqrt{3}x$$

$$\overline{BD} = x\cot 60^o = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$$\overline{CD} = x\cot 45^o = x$$

因為 A、B、C 共線且 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = 50$ 公尺，所以在 ΔACD 中，$\overline{BD}$ 恰為 $\overline{AC}$ 邊上的中線，利用中線公式：

$$2\left(\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2\right) = 4\overline{BD}^2 + \overline{AC}^2$$

亦即 $2(3x^2 + x^2) = 4\cdot\frac{x^2}{3} + 100^2$

得 $x = 10\sqrt{15}$

故樓高為 $10\sqrt{15}$ 公尺。

6. 因為 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於一點，所以

$$\overline{AF}\cdot\overline{CE}\cdot\overline{BD} = \overline{BF}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{CD}$$

即 $\overline{AF}\cdot 3\cdot 3 = \overline{BF}\cdot 4\cdot 2$

所以 $\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{8}{9}$

7. 觀察 $7^{30} = 49^{15}$ 而 $48 < 49 < 50$

因此 $48^{15} < 7^{30} < 50^{15}$

以下計算 48^{15} 和 50^{15} 位數

$$\begin{aligned}\log 48^{15} &= 15\log 48\\ &= 15(4\log 2 + \log 3)\\ &= 15(4\cdot 0.3010 + 0.4771)\\ &= 25.2165\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log 50^{15} &= 15\log 50\\ &= 15(2 - \log 2)\\ &= 15(2 - 0.3010)\\ &= 25.485\end{aligned}$$

也就是說 48^{15} 和 50^{15} 皆為 26 位數，故 7^{30} 亦為 26 位數。

8. $\langle a_n \rangle$滿足$a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n+1$

改寫為

$$a_{n+2}+\frac{1}{4}=2\left(a_{n+1}+\frac{1}{4}\right)+3\left(a_n+\frac{1}{4}\right)$$

再令$b_n=a_n+\frac{1}{4}$，則$\langle b_n \rangle$滿足

$$b_{n+2}=2b_{n+1}+3b_n \qquad (*)$$

且$b_0=a_0+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，$b_1=a_1+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

上面(*)的特徵方程式為

$x^2=2x+3$，即$(x+1)(x-3)=0$

兩根為-1和 3，因而得

$$b_n=A(-1)^n+B\cdot 3^n$$

其中A、B滿足以下條件

$$\frac{5}{4}=b_0=A(-1)^0+B\cdot 3^0=A+B$$

$$\frac{9}{4}=b_1=A(-1)^1+B\cdot 3^1=3B-A$$

解之可得$A=\frac{3}{8}$、$B=\frac{7}{8}$

故可得$b_n=\frac{3}{8}(-1)^n+\frac{7}{8}\cdot 3^n$

進而知$a_n=b_n-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}(-1)^n+\frac{7}{8}\cdot 3^n-\frac{1}{4}$

所以

$$\begin{aligned} a_{50}&=\frac{3}{8}(-1)^{50}+\frac{7}{8}\cdot 3^{50}-\frac{1}{4} \\ &=\frac{7}{8}\cdot 3^{50}+\frac{1}{8} \end{aligned}$$

9. 依題意條件：$A^2=A$

$$A^2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix}$$

可知

$a^2+bc=a,\ \ b(a+d)=b$
$c(a+d)=c,\ \ bc+d^2=d$

(i) 若 $b=c=0$ 則 $a^2=a$ 且 $d^2=d$
得 $a=0$ 或 1，$d=0$ 或 1
但 A 不是零矩陣或單位矩陣，
所以$(a, d)=(0, 1)$或$(1, 0)$
此時 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$

(ii) 若 b, c 不全為 0，則 $a+d=1$
即 $d=1-a$，此時

$$bc+d^2=d \Leftrightarrow bc+(1-a)^2=1-a$$
$$\Leftrightarrow bc+a^2=a$$

注意到

$$\begin{aligned}
&a^2+b^2+c^2+d^2\\
&=a^2+(1-a)^2+b^2+c^2\\
&\geq 2a^2-2a+1+2|bc|\\
&=2a^2-2a+1+2|a-a^2|
\end{aligned}$$

①若 $0\leq a\leq 1$，則 $a-a^2\geq 0$
此時

$$\begin{aligned}
&2a^2-2a+1+2|a-a^2|\\
&=2a^2-2a+1+2(a-a^2)\\
&=1
\end{aligned}$$

即知 $a^2+b^2+c^2+d^2\geq 1$

②若 $a>1$ 或 $a<0$，則 $a-a^2<0$
此時

$$\begin{aligned}
&2a^2-2a+1+2|a-a^2|\\
&=2a^2-2a+1+2(a^2-a)\\
&=4a^2-4a+1\\
&>1
\end{aligned}$$

即知 $a^2+b^2+c^2+d^2>1$
綜合上述(i)和(ii)的討論知 $a^2+b^2+c^2+d^2$ 的最小值為 1。

10. 設由 $A(1,\text{-}2)$ 作 Γ 的切線的切點座標為 (a,b)(有兩組解)，於是 a, b 滿足

$b=a^2+a+1$ (1)

且切線方程式為

$y-b=(2a+1)(x-a)$

因為 $A(1,\text{-}2)$ 在切線上，所以

$-2-b=(2a+1)(1-a)$ (2)

解(1)、(2)即得 (a,b)，事實上 $-2-(a^2+a+1)=(2a+1)(1-a)$

即 $a^2\text{-}2a\text{-}4=0$ (3)

令 a 的兩根為 a_1、a_2，對應的 b 為 b_1、b_2，

即 $B(a_1,b_1)$ 和 $C(a_2,b_2)$ ，於是 ΔABC 的面積為

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a_1-1 & a_2-1 \\ b_1+2 & b_2+2 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(a_1-1)(b_2+2)\text{-}(a_2-1)(b_1+2)\right|$$

注意：由(1)、(3)可知

$$\begin{aligned} b_i+2&=a_i^{\ 2}+a_i+1+2 \\ &=2a_i+4+a_i+3 \\ &=3a_i+7 \end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned} &(a_1-1)(b_2+2)\text{-}(a_2-1)(b_1+2) \\ =&(a_1-1)(3a_2+7)\text{-}(a_2-1)(3a_1+7) \\ =&10(a_1-a_2) \end{aligned}$$

所以 ΔABC 的面積為 $\frac{1}{2}\left|10(a_1-a_2)\right|=5\left|a_1-a_2\right|=10\sqrt{5}$

二、 計算證明題(共 2 題，每題 10 分，共 20 分)

1. 假設 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 為有理數

於是

$x-\sqrt{2}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$\left(x-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$

$2+x^2-2\sqrt{2}x=8+2\sqrt{15}$

$x^2-6=2\sqrt{15}+2\sqrt{2}x$

$$\left(x^2-6\right)^2=\left(2\sqrt{15}+2\sqrt{2}x\right)^2$$
$$=60+8x^2+8\sqrt{30}x$$

此時左邊顯然是有理數，而右邊則是無理數，矛盾！

2. (1) $P_{m,1}=\dfrac{m}{m+1}\cdot\dfrac{m-1}{m}=\dfrac{m-1}{m+1}$

$$P_{m,2}=\frac{m}{m+2}\cdot\frac{m-1}{m+1}\cdot\left(\frac{m-2}{m}+\frac{2}{m}\cdot\frac{m-2}{m-1}\right)$$
$$=\frac{m-2}{m+2}$$

(2) $P_{m,n}=P\,(\text{最後一張是甲})\cdot P\,(\text{甲一路領先}|\text{最後一張是甲})$

$+P\,(\text{最後一張是乙})\cdot P\,(\text{甲一路領先}|\text{最後一張是乙})$

$$=\frac{m}{m+n}P_{m-1,n}+\frac{n}{m+n}P_{m,n-1}$$

(3)由(1)猜測 $P_{m,n}=\dfrac{m-n}{m+n}$ ，$m\ge n$

顯然 $P_{2,1}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{2-1}{3}$

對 $m+n$ 作歸納，當 $m+n=3$ 時已證明。設 $m+n=N$ 時已證明。

當 $m+n=N+1$ 時，由(2)知

$$P_{m,n}=\frac{m}{m+n}P_{m-1,n}+\frac{n}{m+n}P_{m,n-1}$$
$$=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{m-1-n}{m+n-1}+\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m-(n-1)}{m+n-1}$$
$$=\frac{(m-n)(m+n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$$
$$=\frac{m-n}{m+n}$$