

新竹市立香山高級中學 110 學年度教師甄選題目卷

科目：高中數學科

一、單選題(每題 4 分，共計 60 分)

1. 試問無窮級數 $1+2\times\left(\frac{1}{2021}\right)+3\times\left(\frac{1}{2021}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{2021}\right)^3+5\times\left(\frac{1}{2021}\right)^4+\dots=?$

- (A) $\left(\frac{2020}{2021}\right)^2$ (B) $\left(\frac{2021}{2022}\right)^2$ (C) $\left(\frac{2022}{2021}\right)^2$ (D) $\left(\frac{2021}{2020}\right)^2$ (E) 2021

2. 已知正數 a, b 滿足條件 $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(a+b)$ ，則 $\frac{b}{a}$ 之值為何？

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{8}{5}$ (C) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (E) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. 試問 $\frac{d}{dx}\left(\int_0^{3x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt\right)$ 在 $x=1$ 之值為何？

- (A) $\frac{1}{10\sqrt{10}}$ (B) $\frac{3}{10\sqrt{10}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (E) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

4. 試問 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n} + \frac{\sin \frac{3\pi}{n}}{n} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n} \right)$ 之值為下列何者？

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $\frac{1}{\pi}$ (E) $\frac{2}{\pi}$

5. 設 n 為正整數，則 $C_1^n + 3C_2^n + 3^2 C_3^n + 3^3 C_4^n + \dots + 3^{n-1} C_n^n = ?$

- (A) $\frac{4^n - 1}{3}$ (B) $\frac{4^n}{3}$ (C) $\frac{4^n + 1}{3}$ (D) $4^n - 1$ (E) 4^n

6. 已知函數 f 的定義域為所有正整數，且滿足條件 $f(1) = 2021$ ，以及對於任意正整數 $n > 1$ ， $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$ 成立，試問 $f(2021)$ 之值為何？

- (A) $\frac{1}{2021}$ (B) $\frac{1}{1011}$ (C) $\frac{1010}{1011}$ (D) 1011 (E) 2020

7. 設 p, q 為質數，如果 $p+q$ 和 $p+7q$ 都是完全平方數（即某整數的平方），則 $p^2 + q^2$ 之值為何？

- (A) 8 (B) 13 (C) 29 (D) 34 (E) 58

8. 已知實數 x, y 滿足條件 $\sin x + \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 與 $\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，則 $\sin(x+y)$ 之值為何？

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (C) 1 (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. 設一複數為 $z = a + bi$ ，其中 a, b 為實數，我們定義 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。如果 $z = \cos 10^\circ + i \sin 10^\circ$ ，

則 $|z + 2z^2 + 3z^3 + \dots + 36z^{36}|^{-1}$ 之值為下列何者？

- (A) $\frac{1}{36} \sin 10^\circ$ (B) $\frac{1}{18} \sin 10^\circ$ (C) $\frac{1}{18} \sin 5^\circ$ (D) $\frac{1}{36} \cos 10^\circ$ (E) $\frac{1}{18} \cos 5^\circ$

10. 已知三實數 a, b, c 滿足 $\sqrt{3}(a-b) + 3(b-c) + (c-a) = 0$ ，且 $b \neq c$ ，則 $\frac{(a-b)(a-c)}{(b-c)^2}$ 之值為何？

- (A) $3 - \sqrt{3}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 3 (D) $3 + \sqrt{3}$ (E) 6

11. 坐標平面上，如果有一條經過原點 $(0,0)$ 且斜率為正的直線，切雙曲線 $x^2 - (y-1)^2 = 1$ 於一點 (a,b) ，則 $\sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ 之值為下列何者？

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{12}$ (E) $\frac{\pi}{2}$

12. $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 75^\circ$ ， $\angle BCA = 45^\circ$ ，如果 P 為 \overline{BC} 上的點使得 $\overline{BP} = 2\overline{PC}$ ，則 $\angle APB$ 的度數為何？

- (A) 45° (B) 60° (C) 75° (D) 90° (E) 120°

13. 設 n 為正整數，滿足 $n \cdot 2^{n-1} + 1$ 為完全平方數的 n 值共有多少個？

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

14. 已知一連續實值函數 $f(x)$ 滿足條件 $f(2x) = 3f(x)$ ，對所有實數 x 都成立，如果 $\int_0^1 f(x) dx = 1$ ，則 $\int_1^2 f(x) dx = ?$

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 9

15. $\triangle ABC$ 中， $\tan \angle BAC = \frac{22}{7}$ ，過頂點 A 作 \overline{BC} 邊上的高交 \overline{BC} 於 D 點，使得 $\overline{BD} = 3$ ， $\overline{DC} = 17$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為何？

- (A) 110 (B) 120 (C) 170 (D) 220 (E) 510

二、多選題(每題 8 分，共計 40 分;每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項)

1. 試問下列哪些選項正確？

(A) $2^{2021} - 1$ 乘開後其個位數字為 1。

(B) $17^{110} + 3$ 乘開後其個位數字是 6。

(C) $\log_{2021}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \log_{2020}\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \log_{2019}\left(\frac{1}{4}\right) \cdots \log_2\left(\frac{1}{2021}\right) = -1$ 。

(D) 同時投擲二個公正的骰子一次，其出現點數和為 7 的機率為 $\frac{1}{6}$ 。

(E) 積分 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} dx = 1$ 。

2. 試問下列哪些選項正確?

- (A) 對任意正整數 n ，如果 $0 \leq a_n \leq b_n$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也發散。
- (B) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也發散。
- (C) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。
- (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$
- (E) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 為收斂級數。

3. 試問下列哪些選項正確?

- (A) 如果 n 階方陣 A 有 n 個相異實數特徵根，則 A 必可對角化。
- (B) 如果 n 階矩陣 A 可對角化，且 $AB=BA$ ，則 n 階矩陣 B 必可對角化。
- (C) 如果存在一可逆 n 階矩陣 P ，使得 $B = P^{-1}AP$ ，則 n 階矩陣 A 與 B 有相同的特徵根。
- (D) 必可存在一個二階方陣 A ，滿足 $A^2 = -I_2$ ，其中 A 各位置元素都是實數，且 I_2 為單位矩陣。
- (E) 已知 A, B 皆為 n 階方陣，則 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 。

4. 已知三角形 ABC 之三邊長分別為 a, b, c ，且其外接圓半徑為 R ，若 $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$ ，則下列哪些選項正確?

- (A) $\angle A = 45^\circ$ 。
- (B) $\angle A = 90^\circ$ 。
- (C) $b = c$ 。
- (D) $a = R$ 。
- (E) $a = 2R$ 。

5. 已知函數 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上連續，其中 $a < b$ ，如果積分 $\int_a^b f(x) dx = 0$ ，則下列哪些選項是正確?

- (A) 對任意 x 滿足 $a \leq x \leq b$ ，則 $f(x) = 0$ 。
- (B) 必存在某一個 x ，使得 $f(x) = 0$ ，其中 $a \leq x \leq b$ 。
- (C) $\int_a^b |f(x)| dx = 0$ 。
- (D) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| = 0$ 。
- (E) 對任意 c 滿足 $a < c < b$ ，則 $\int_a^c f(x) dx = 0$ 。

高中
數學

新竹市立香山高級中學 110 年
教師甄試答案卷

1	2	3	4	5
D	E	E	E	A
6	7	8	9	10
B	A	E	C	D
11	12	13	14	15
B	B	A	C	A
16	17	18	19	20
AD	CE	ACD	BCE	BD
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50