教育部受託辦理110學年度
公立高級中等學校教師甄選

數學科　試題

數學科　試題

請注意：本試題共兩部分，選擇題12題，及綜合題2大題，共計100分；**選擇題請用2B軟心鉛筆在<u>答案卡</u>劃記，綜合題限用藍色、黑色之原子筆或鋼筆在<u>答案本</u>上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆**。<u>本科不可以使用電子計算器。</u>

第一部分：選擇題（共40分）

一、單選題（每題3分，共24分）

(B) 1. 設有一種檢驗新冠肺炎的儀器，依據過去的經驗得知：罹患此病的人，有90%的機率經此儀器檢驗會呈現陽性反應（感染此傳染病）；不患此病的人，也有6%的機率會被誤檢而呈現陽性反應。已知某一地區的居民接受此儀器的檢驗後，呈現陽性反應者，最後證實有$\dfrac{22}{67}$的比例是沒有感染此傳染病的，則該地區居民罹患此傳染病的百分比為何？　(A)8%　(B)12%　(C)17%　(D)23%。

(C) 2. 甲乙丙三人練習傳球，一共傳球10次。球首先從甲手中傳出，若第10次仍傳給甲，共有種不同的傳球方法？　(A)156　(B)258　(C)342　(D)514。

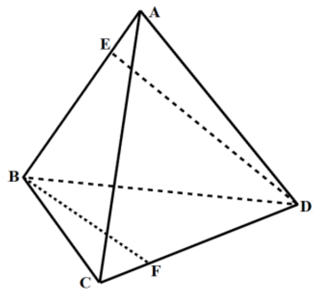
(C) 3. 方程式$|\cos x|+\cos x-\log_4 x=0$有幾個實數解？　(A)3　(B)4　(C)5　(D)6。

(A) 4. 設矩陣$A=\begin{bmatrix}-5 & -4\\ 9 & 7\end{bmatrix}$，則$A^{51}-A^{50}+A^3-3A^2-2A+4I_2$為下列何者？（$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$）

(A)$\begin{bmatrix}24 & 16\\ -36 & -24\end{bmatrix}$　(B)$\begin{bmatrix}-24 & -16\\ 36 & 24\end{bmatrix}$　(C)O_2　(D)$4I_2$。

(C) 5. 已知點P為邊長為$\sqrt{2}$的正四面體$ABCD$內的任意一點，P到四個面的距離分別為d_1、d_2、d_3、d_4，則$d_1^{\,2}+d_2^{\,2}+d_3^{\,2}+d_4^{\,2}$的最小值為何？　(A)$\dfrac{1}{12}$　(B)$\dfrac{3}{16}$　(C)$\dfrac{1}{3}$　(D)$\dfrac{4}{3}$。

(D) 6. 如圖，已知正四面體$ABCD$中，$\overline{AE}=\dfrac{1}{4}\overline{AB}$，$\overline{CF}=\dfrac{1}{4}\overline{CD}$。

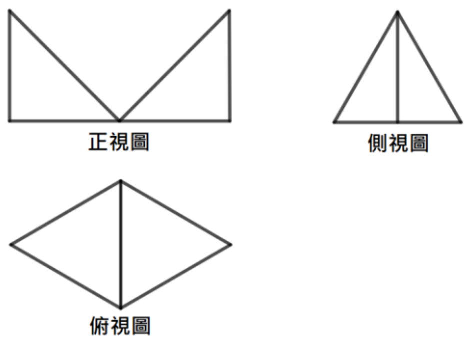


設向量$\overline{DE}$與向量$\overline{BF}$的夾角為θ，求$\sin\theta$的值為何？

(A)$\dfrac{1}{13}$　(B)$\dfrac{4}{13}$　(C)$\dfrac{\sqrt{26}}{13}$　(D)$\dfrac{\sqrt{153}}{13}$。

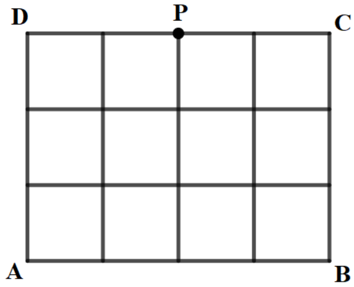
(B) 7. 一個幾何體的三視圖如圖所示：側視圖是一個邊長為 1 的正三角形，俯視圖是兩個正三角形拼成的菱形，試問這個幾何體的體積為何？

(A)$\dfrac{1}{2}$　(B)$\dfrac{1}{4}$　(C)$\dfrac{3}{4}$　(D)$\dfrac{\sqrt{3}}{16}$。



(A) 8. 如圖，東西方向有四條道路，南北方向有五條道路。已知在交叉點處，往東或往北走的機率相同；若只能往一個方向走時，機率則為1。從 A 點出發沿著道路走捷徑至 C 點，中途不經過 P 點的機率為何？

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{3}{4}$　(C) $\frac{1}{6}$　(D) $\frac{3}{8}$ 。



二、複選題（全對才給分，每題4分，共16分）

(B C D) 9. 已知向量 (a_1,b_1,c_1)、(a_2,b_2,c_2) 不平行，且方程組 $\Gamma:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0\\a_2x+b_2y+c_2z=0\\a_3x+b_3y+c_3z=0\end{cases}$ 有一組解 $(1,2,3)$；而方程組 $\Gamma':\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ 有一組解 $(3,2,1)$，則下列哪些選項亦為方程組 Γ' 的解？　(A) $(0,0,0)$　(B) $(4,4,4)$　(C) $(2,0,-2)$　(D) $(10,16,22)$ 。

(A D) 10. 設 k 為實數，關於坐標平面上函數 $y=x^3-3x^2+4x-k$ 的圖形。請問下列選項哪些正確？　(A)圖形與任一水平直線恰有一交點　(B)圖形有水平切線　(C)圖形有最高點，也有最低點　(D)若 (m,n) 在圖形上，則 $(2-m,4-n-2k)$ 也在圖形上。

(A C D) 11. 某班的數學定期考因成績太低，老師決定依據線性函數分數加分，加分後每位同學從 x_i 分提高至 y_i 分，其中關係式為 $y_i=ax_i+b$，且 $a,b>0$；結果老師發現調整後的成績仍偏低，決定進行第二次線性調分，經過調分後每位同學從 y_i 分調整為 z_i 分，其中的關係式為 $z_i=\frac{1}{a}y_i+b$。經過兩次調整後，全班每位同學的分數都比原始成績還要高，而且最高分調整為 100 分。已知小華從原來的 12 分經過兩次調整後提高至 48 分，而小明從原來的 28 分經過第一次調整後的分數為 55 分。依照上述條件，下列哪些選項敘述為真？　(A) x_i 的標準差與 z_i 的標準差相等　(B)小華第一次調整後的分數為 36 分　(C) $ab=25$　(D)全班最高分的同學，第一次調分所得的分數與第二次調分所得的分數是相同的。

(A D) 12. 設 $(\sqrt{2},2,0),(-\sqrt{2},2,0),(-\sqrt{2},-2,0),(\sqrt{2},-2,0)$ 為一正立方體的四個頂點，則下列的哪些點也為此正立方體的頂點？　(A) $(\sqrt{2},0,2)$　(B) $(0,2,\sqrt{2})$　(C) $(\sqrt{2},2,4)$　(D) $(-\sqrt{2},0,-2)$ 。

第二部分：綜合題（共60分）

一、填充題（每題4分，共36分）

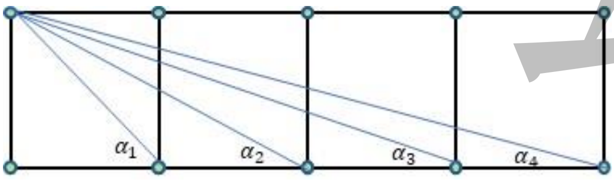
1.若 $2\times 9^{x}-(m+1)3^{x}+m+1=0$ 有兩個相異實根，試求實數 m 的範圍。Ans: $m>7$

2.試求所有滿足 $(n^2-2n-2)^{n^2+47}=(n^2-2n-2)^{16n-16}$ 的自然數 n 的總和。Ans:19

3.設 $[x]$ 代表不超過 x 的最大整數，求 $\int_0^3 x^2[x]dx$ 之值。Ans: 15

4.有邊長為 10 的正方形 $ABCD$。設 $\overline{AB}$ 的中點 M，A 關於 $\overline{DM}$ 的對稱點為 E 時，則 ΔBCE 的面積為＿10＿平方單位。

5.如下圖四個相同正方形連接而成，則 $\tan(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$ 之值為 -4。



6. z是複數，且 $2z+2|\bar{z}|=3+2i$，則 $z=\dfrac{5}{12}+i$。

7. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid mx+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+my=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，則當實數 $m=$＿$-1\pm\sqrt{2}$＿時，$(A\cup B)\cap C$ 有三個元素。

8. 數字 1~9 隨機排成一列，接著將前面沒有更小數字的那些數字圈選出來，計算被圈選的數字總和。例如：123456789 只圈選 1，得到的和為 1；548721936 圈選 5、4、2、1，得到的和為 12；987654321 得到的和為 45 等等。則這樣的和的期望值為＿9＿。

9.已知 $[x]$ 為高斯符號，表示不超過 x 的最大整數。求方程式 $\left[\dfrac{x}{1!}\right]+\left[\dfrac{x}{2!}\right]+\cdots+\left[\dfrac{x}{10!}\right]=1001$ 的整數解 $x=$＿584＿。

二、證明題（每題8分，共24分）

1.設 a,b,c 分別表 ΔABC 之 $\angle A$、$\angle B$和 $\angle C$ 的對邊長，$\angle B=60^\circ$，證明：

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)=3$$ 。

2. $i=\sqrt{-1}$，複數 z 和 w 滿足 $zw-2iz-iw-5=0$，$|z|=2$。證明：$|w-i|=2$。

3.證明：$\left(C_0^n-C_2^n+C_4^n-\cdots\right)^2+\left(C_1^n-C_3^n+C_5^n-\cdots\right)^2=2^n$。