

110 國立台北科技大學附屬桃園農工高級中等學校(記憶版)

1. (1) 證明 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ 。

(2) 已知 a, b, c 皆為自然數， $\log_a c = \log_b 4$ 且 $a + b = 12$ ，請列出所有可能。

2. 已知巴斯卡定理 $C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$

(1) 證明 $C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \cdots + C_2^n = C_3^{n+1}$ 。

(2) 利用(1)推導出 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。

3. 試證明 $C_0^n - \frac{1}{2}C_1^n + \frac{1}{3}C_2^n - \frac{1}{4}C_3^n + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}$

4. (1) 已知 $a, b, c > 0$ ，試證明 $\frac{a^2}{2a+b} + \frac{b^2}{2b+c} + \frac{c^2}{2c+a} \geq \frac{a+b+c}{3}$ 。

(2) 已知 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 > 0$ ，試證明 $(a_1^3 + a_2^3)(b_1^3 + b_2^3)(c_1^3 + c_2^3) \geq (a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2)^3$ 。

5. 若 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，且 \vec{a} 與 \vec{b} 的夾角為 θ

已知 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ 、 $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ 、 $\|\vec{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

試證明 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$

6. 三角形 ABC 中， $\angle A, \angle B, \angle C$ 之對應邊分別為 a, b, c 。已知 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 4 \cos C$ ，試求

$\tan C (\cot A + \cot B)$ 之值。

7. (1) 已知 $A \in M_{n \times n}$ ，存在 $B \in M_{n \times n}$ 滿足 $AB = I_n$ 下，試求 $BA = I_n$ 。
(2) 求三階方陣之反方陣

8. 試計算下列問題

(1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$

(2) 已知 $f(x) = [\sin(x^2 + 1)]^x$ ，試求 $f'(x)$

(3) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^3}} dx$

(4) $\int e^{-x} \cos x dx$