

## 一、計算證明題

1. 若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  皆為大於 1 的正數

(1) 證明  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ 。(5 分)

(2) 若  $a > 3$ ，取函數  $f(x) = \log_a(x-2) + x^3 - 28$  在閉區間  $[3, a+2]$  上的圖形與  $x$  軸有幾個交點？請說明你的答案。(5 分)

(3) 若  $\log_b c = \log_a 4$  且  $a+b=12$ ，當  $a$ 、 $b$ 、 $c$  皆為自然數時，試求  $(a, b, c)$  可能的序對為何？(5 分)

2. 巴斯卡定理：若  $k$ 、 $n$  皆為自然數且  $1 \leq k \leq n$ ，則  $C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$

(1) 若  $n$  為自然數且  $n \geq 2$ ，證明

$$C_2^n + C_2^{n-1} + C_2^{n-2} + \cdots + C_2^2 = C_3^{n+1}。 (5 分)$$

(2) 利用(1)，若  $n$  為自然數，證明

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}。 (8 分)$$

備註：請使用(1)導出(2)，其它方法不予計分。

3. 若  $n$  為自然數，證明

$$C_0^n - \frac{1}{2}C_1^n + \frac{1}{3}C_2^n - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}。 (8 分)$$

4. (1) 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c > 0$ ，證明

$$\frac{a^2}{2a+b} + \frac{b^2}{2b+c} + \frac{c^2}{2c+a} \geq \frac{a+b+c}{3}。 (5 分)$$

(2) 已知  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b_1$ 、 $b_2$ 、 $c_1$ 、 $c_2 > 0$ ，證明

$$(a_1^3 + a_2^3)(b_1^3 + b_2^3)(c_1^3 + c_2^3) \geq (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)^3。 (8 分)$$

5. 設兩向量  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，其夾角為  $\theta$

定義

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad \|\vec{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

證明

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta。 (8 分)$$

6. 在  $\triangle ABC$  中，其內角， $A$ 、 $B$ 、 $C$  所對應的邊分別為  $a$ 、 $b$ 、 $c$  且  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 4\cos C$ ，  
求  $\tan C(\cot A + \cot B)$  的值。(8分)

7. (1) 若  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ，假設存在  $B \in M_n(\mathbb{R})$ ，使  $AB = I_n$ ，其中  $I_n$  為  $n \times n$  的單位方陣，  
證明  $BA = I_n$ 。(5分)

(2) 若  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ ，求  $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)

8. (1) 求  $\lim_{n \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)

(2) 若  $f(x) = [\sin(x^2 + 1)]^x$ ，求  $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)

(3) 求  $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5分)

(4) 求  $\int \frac{\cos x}{e^x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(10分)