110 學年度高雄中學數學科教師甄試（記憶版）

1、數列$\{a_n\}$是遞迴數列，滿足$a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n+\frac{1}{5}a_{n-1}$，$n\geq 2$且$a_1=1$，$a_2=3$試求

（1）數列的一般式。 （2）此數列極限是否存在？若有，求其極限？

2、令$f(x)=1+\sin 2x+4(\cos x+\sin x)$，求其最小值。

3、從各位數字均不同的四位正整數中隨機取出一個數，取出的數是 99 的倍數的機率為何？

4、直角坐標空間中$A(1,2,3)$、$B(2,2,2)$、$C(3,\frac{11}{5},\frac{9}{5})$、$D(2,\frac{5}{2},4)$，已知$\overrightarrow{AD}$與$\overrightarrow{BC}$交於點$P$，求$\Delta PAB$之外接圓半徑。

5、對於任意 3 階轉移矩陣A，是否存在機率矩陣$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，

$(x_1,x_2,x_3\geq 0$且$x_1+x_2+x_3=1)$，滿足$AX=X$？請論證你的結論。

6、實係數三次多項式函數$y=f(x)$，圖形通過$(0,20),(1,25),(2,30)$三點，則$\int_1^{1+\sqrt{2}}f(x)dx=$？

7、設地球半徑為 6400 公里，設定空間直角坐標：地球的球心為坐標原點，x軸正向通過本初子午線與赤道的交點，y軸正向通過東經90^0線與赤道的交點，z軸正向通過北極，地球表面上有三個點A,B,C，A點位於東經140^O，北緯20^O，B點位於東經80^O，北緯40^O，C點位於西經160^O，南緯80^O處，在ΔABC所在的平面上，設ΔABC之重心為G，求G的直角坐標。

8、直角坐標平面上有五個點A,B,C,D,P_o，一隻青蛙從P_o跳到以A點為對稱中心之對稱點P_1，再從P_1跳到以B點為對稱中心之對稱點P_2，再從P_2跳到以C點為對稱中心之對稱點P_3，再從P_3跳到以D點為對稱中心之對稱點P_4，已知$\overline{BD}$之中點為$(\frac{8}{3},\frac{10}{3})$，$\overline{AC}$之中點為$(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$，則$\overline{P_0P_4}=$？

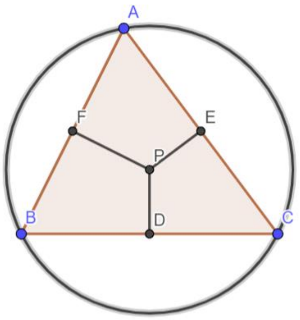
9、對於 $n\in N$ ，令 $S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$ ，$r_n=S_n-\ln(n)$ ，已知 $\lim r_n=r$ (歐拉常數)

（1） $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+...=$

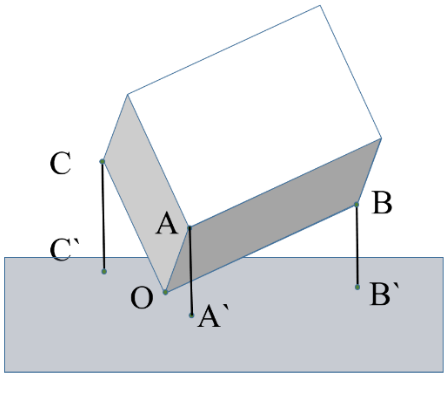
（2） $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{3\times7}+...+\frac{1}{n(2n+1)}+...=$

10、試判斷無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n+2^n+3^n+...+2020^n}{2021^{n+1}}$ 發散或收斂？並說明理由。

11、如下圖，ΔABC 的外接圓圓心 P，由 P 到三邊坐垂直與三邊分別交於點 D,E,F ，若 $\overrightarrow{PD}+2\overrightarrow{PE}+3\overrightarrow{PF}=\vec{0}$ ，試求 $\tan B$ 之值。



12、一個長方體的裝置藝術座立於飯店一樓大廳內，如圖所示。為了穩固此裝置，除了將 O 點落在地面上，還在 A,B,C 三處個架上一根垂直地面的鐵柱，分別為 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ ，已知 $\overline{AA'}=90cm$ 、 $\overline{BB'}=60cm$ 、 $\overline{CC'}=100cm$ ，試問此裝置藝術在大廳裡的高度有多少 cm ？（高度指此裝置上的點與地面的最大距離）



13、矩陣$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & -32 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -13 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -7 & 9 \end{bmatrix}$經若干次基本列運算後變為矩陣

$\begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 & a & d \\ 2 & 1 & 4 & b & e \\ 1 & 3 & -3 & c & f \end{bmatrix}$，試求序對$(a,b,c,d,e,f)$。

14、設$x_1,x_2,x_3,...,x_n \in R$，$n \geq 2$，試證明當$< x_1,x_2,x_3,...,x_n >$的中位數時，$\sum_{i=1}^{n} |x-x_i|$有最小值。

15、複數平面上，點$P(z)$在第二項象限上且$|z|=1$，試求$|z^3+z^2+z+1|$的最大值。

110 學年度高雄中學數學科教師甄試（答案欄）感謝寸絲老師提供

1	2	3	4	5
(1) $a_n=\frac{8}{3}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{5})^{n-2}$ (2) $\frac{8}{3}$	$2-4\sqrt{2}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	存在，令 $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$，$\det(A-I)=0$
6	7	8	9	10
$5+25\sqrt{2}$	$(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},0)$ 單位長 6400 公里	20	(1) $\ln 2$ (2) $2-\ln 2$	收斂，各數皆正，交換 $\sum$ 順序，變成 2020 個無窮等比級數和
11	12	13	14	15
2	250cm	$(2,-12,19,15,8,4)$	依 x_i 分段討論目標試的遞增遞減	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$