國立臺南女子高級中學九十六學年度教師甄選數學科答案卷

一、填充題：(每一格 5 分，共 80 分)

(1).	$\frac{20}{3}$	(2).	$\frac{1}{8}$	(3).	$\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$	(4).	39
(5).	$\sqrt{170}$	(6).	-40	(7).	92	(8).	4003
(9).	$3\sqrt{3}$	(10).	$\frac{67}{522}$	(11).	$\frac{9}{8}$	(12).	4
(13).	$\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$	(14).	4608	(15).	$\frac{3}{5}$	(16).	-7

二、計算題：(每題 10 分，共 20 分)

1. $\underline{y=-8x+14}$

<解>令切線 L：$y=ax+b$

$$\begin{cases} y = ax+b \\ y=(x-2)^3(x-6)+2 \end{cases} \Rightarrow (x-2)^3(x-6)+2=ax+b$$

$\Rightarrow (x-2)^4-4(x-2)^3-a(x-2)-2a-b+2=0$—(1)

因直線 L 與曲線Γ相切於相異的 A、B 兩點

令 $A(\alpha', f(\alpha'))$，$B(\beta', f(\beta'))$

所以 α', α', β', β' 為方程式(1)的四個根

同義 α, α, β, β 為 $t^4-4t^3-at-2a-b+2=0$ 的四個根

依四次方程式根與係數的關係：

$$\begin{cases} 2\alpha+2\beta=4 \\ \alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta=0 \\ 2\alpha\beta(\alpha+\beta)=a \\ \alpha^2\beta^2=-2a-b+2 \end{cases} \Rightarrow (a, b)=(-8, 14)$$

故切線 L 為 $y=-8x+14$。

2. $\underline{17^{\frac{5}{4}}}$

<解>令 $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}+\dfrac{32}{\sqrt{\cos x}}$

因 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}>0$ 且 $\dfrac{32}{\sqrt{\cos x}}>0$

依算幾不等式：

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{\sin x}}+\frac{1}{\sqrt{\sin x}}+\frac{1}{\sqrt{\sin x}}+\frac{1}{\sqrt{\sin x}}+y\sin^2 x}{5} \geq \sqrt[5]{y} \text{—(1)}$$

$$\frac{\frac{32}{\sqrt{\cos x}}+\frac{32}{\sqrt{\cos x}}+\frac{32}{\sqrt{\cos x}}+\frac{32}{\sqrt{\cos x}}+y\cos^2 x}{5} \geq \sqrt[5]{32^4 y} \text{—(2)}$$

由(1)+(2)得

$y \geq 17\sqrt[5]{y} \Rightarrow y \geq 17^{\frac{5}{4}}$，因此

$\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}+\dfrac{32}{\sqrt{\cos x}}$ 的最小值為 $17^{\frac{5}{4}}$。