65/100 60 mins.

新竹市立香山高級中學 100 學年度第 1 學期 第 1 次正式教師甄選數學科題目卷

一、填充題 (13 題，每題 6 分，共 78 分)

1. 坐標空間中，點 A(-1,1,0)，B(3,1,0)， C(1,2,2) ，則△ABC 的外心 (a,b,c) 為何？______ 。

2. 設橢圓 $\Gamma:\dfrac{(x-3)^2}{98^2}+\dfrac{(y-16)^2}{2009^2}=1$，且其內部於第一、二、三、四象限內所圍區域面積依次為 R_1、R_2、R_3、R_4，則 $R_1-R_2+R_3-R_4=$______。

3. 主人宴客，刻意安排 10 個互不認識的客人一同圍坐一圓桌，希望客人能互相認識，不料席間每位客人都只與相鄰的人交談認識。飯局後主人從中隨意挑選四人，試求四人皆互不認識的機率？_______ 。

4. 用八種不同顏色塗正八面體的八個面，每面異色的塗法有幾種？______ 。

5. 若 $k=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{80}}$ 求[k] =______。 ([ ]表高斯符號)

6. 先在橢圓蛋糕 30cm 的長軸與 20cm 的短軸上各切一刀,若欲將蛋糕八等份，且每一刀均切過橢圓中心，則下一刀與長軸

所夾銳角為多少？ ______。

7. $a,b\in R$，若 $ax+by=1$ 與 $x^2+y^2=50$ 僅有整數解，求數對 (a,b) 有多少組？______。

8. $f(x)$ 為整係數多項式，且領導係數為 1， $x=1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$ 為 $f(x)=0$ 之一解，求次數最低之 $f(x)=$______。

9. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_n>0$，且 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{2011}{2a_n}$，假設此數列 $\langle a_n\rangle$ 收斂到某一實數，求此實數______。

(背面尚有試題)

10. $f(x)$ 為 x 之三次多項式，且 $f(2007)=2$， $f(2008)=0$， $f(2009)=1$， $f(2010)=1$，試求 $f(2011)=$______。

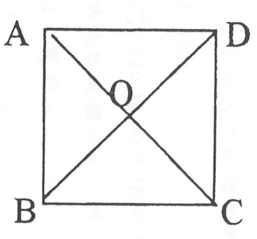
11.求不等式 $\log_{(x+y)}\sqrt{1-x^2} > \log_{(x+y)} y$ 所形成的區域面積=______。

12. 設 P(4,3,1)，$\Gamma:\begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z-5)^2=13 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$，$Q$為$\Gamma$上的一動點，求$\overline{PQ}$的最小值=______。

13. n 為四位數，且各位數字和恰為 12，試求 n 有幾個？______。

二、計算證明題：(2 題，每題 11 分，共 22 分)

1. 如右圖，O為正方形$ABCD$的中心．程式設定讓機器跳蚤在圖中諸點之間跳動，每次都可以跳到相鄰的任何一點，例如：由A點可跳到O、B、D中的任何一點，由O點可跳到A、B、C、D中的任何一點．設從O點開始，經n次跳動返回O點的路線有a_n種，而經n次跳動到達A點的路線有b_n種　，試求a_6+b_6。



2. 設 $a_n=\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)\left(\frac{n+3}{n}\right)\cdots\left(\frac{n+n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

100青山高中 65/100 60 mins.

一、填充

1. $\overline{AB}$垂直平分面：$x=1$

$\overline{BC}$ 〃〃〃〃〃：$2x-y-2z=\frac{1}{2}$

$\triangle ABC$所在平面：$-2y+z=-2$

解聯立得 外心$=(1,\frac{11}{10},\frac{1}{5})$ #

2. $(3,16)\to\ 6\times 32=192$ #

3.
v ○ v
○ ○
v ○ v

全部：$\frac{10!}{10}=9!$

要的排法：$\frac{4!}{4}\times H^{4}_{6-4}\times 6!$

$=3!\times C^{5}_{2}\times 6!$

$P=\frac{3!\times 6!\times C^{5}_{2}}{9!}=\frac{5}{42}$ #

4. $\frac{8!}{4\times 6}=1680$ #

4：四面旋轉

6：輪流當下面頂點 (環狀排)

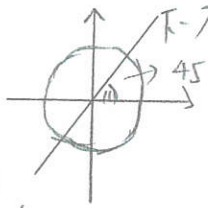
5. $2n-1=2\times 9-1=17$ (n取完算方格)

註：用來的結論 ($\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{2\sqrt{k}}$)

$\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$ $\sqrt{k}+\sqrt{k-1}$

6. $\frac{x^2}{30^2}+\frac{y^2}{20^2}=1$ $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30&0\\0&20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x=30x'\\y=20y'\end{matrix}$

$\Rightarrow x'^2+y'^2=1\Rightarrow$



下一刀：$y'=x'$

$\Downarrow$

$\frac{1}{20}y=\frac{1}{30}x$

$y=\frac{2}{3}x$

$\tan\theta=\frac{2}{3},\ \theta=\tan^{-1}(\frac{2}{3})$ #

7. $x^2+y^2=50$ 有整數解，$(x,y)=(7,1),(1,7),(5,5)$ (第一象限)

註：$ax+by=1$ 不過原點

有12個點，$C^{12}_{2}+12-6=72$ #

12個切線

過原點的線

8. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}=(1-x)\xrightarrow{3次方}6+3\cdot\sqrt[3]{8}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})=1-x^3-3x(1-x)$

$6+6(1-x)=-x^3+3x^2-3x+1$

$\Rightarrow x^3-3x^2-3x+11=f(x)$ #

9. $x=\frac{x}{2}+\frac{2011}{2x}\Rightarrow 2x^2=x^2+2011\Rightarrow x=\sqrt{2011}$ (取正) #

10. 巴貝奇，三次 ⇒ 1, 4, 6, 4, 1

$f(2007)-4f(2008)+6f(2009)-4f(2010)+f(2011)=0$

$2-0+6-4+f(2011)=0$

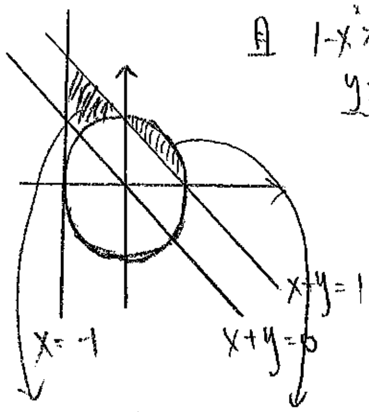
$f(2011)=-4$ #

11. 若 $x+y>1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} > y$ ($x^2+y^2<1$, 圓內)

$0<x+y<1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} < y$

且 $1-x^2>0 \Rightarrow -1<x<1$

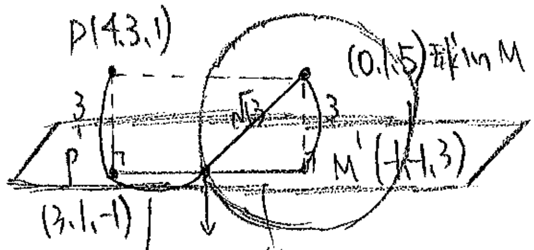
$y>0$



$(1\times1 - 1^2\pi\times\frac{1}{8}) + (1^2\pi\times\frac{1}{4} - 1^2\times\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}$ #

---

2. 示意圖



$\overline{P'M'} = \sqrt{16+4+16} = 6$

$\overline{MQ} = \sqrt{\sqrt{13}^2 - 3^2} = 2$

$6-2=4$

$\overline{PQ} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ #

---

13. $\underline{x}$ $\underline{y}$ $\underline{z}$ $\underline{w}$

x 非 0 H^4_{11}

x 爆 H^4_2

$(x=10)$

y,z,w 其中之一爆 H^4_1

C^3_1

$12-10-1$

爆 給 x

所求:

$H^4_{11} - H^4_2 - C^3_1 H^4_1 = 342$ #

計算一: $A,B,C,D \Rightarrow b_n$

$$a_n = 4b_{n-1},\quad b_n = 2b_{n-1}+a_{n-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_6 \\ b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 320 \\ 256 \end{pmatrix}$$ 故 $a_6+b_6 = 576$ #

註: 指數大 → 對角化.

計算二:

需要 $\frac{1}{n} \Rightarrow$ 取 $\ln$

$$\Rightarrow \ln a_n = \frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)$$

$\lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow$ discuss $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$

$$= \left[(1+x)\cdot\ln(1+x) - x\right]\Big|_0^1$$

$$= (2\cdot\ln 2) - 1$$

$$= \ln\frac{4}{e}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{e}$ #