臺中市立臺中第一高級中等學校 109 學年度第 1 次教師甄選　　數學科　試題卷

一、填充題甲(每一格皆為 6 分，共 10 格，總共為 60 分)

1. 已知 z 為複數且滿足 $|z|=1$、$|z-1.45|=1.05$，求 z 的實部為____________。

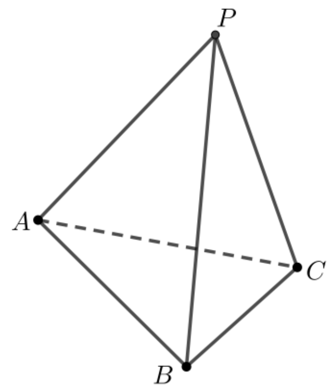
2. 設 $P(x)=x^5-x^2+1=0$ 的五個根為 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$，$Q(x)=x^2+1$，
   則 $Q(\alpha_1)\cdot Q(\alpha_2)\cdot Q(\alpha_3)\cdot Q(\alpha_4)\cdot Q(\alpha_5)=$____________。

3. 設 $x\in R$ 且滿足方程式 $\dfrac{8^x+27^x}{12^x+18^x}=\dfrac{7}{6}$，則 $x=$____________。

4. 設三次實係數多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足 $2f(2)=3f(3)=4f(4)$，且 $f(4)=1010$，
   求 $f(1)+f(5)=$____________。

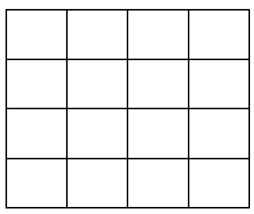
5. 當桌球比賽比分為 10:10 時，稱為 deuce，此後必須由兩人輪流各發一球，直到其中一名球員比對手多勝 2 分時比賽結束。依過去經驗知道，甲乙兩人比賽桌球，當甲發球時，甲得分機率為 $\dfrac{3}{5}$；當乙發球時，乙得分機率為 $\dfrac{3}{5}$。今甲乙兩人比賽，目前比分恰為 10:10，接著輪到甲發球，假設各次得分為獨立事件，則從 deuce 發生後開始計算發球次數，到比賽結束時，兩人發球總次數的期望值為____________次。

6. 已知一四面體 $PABC$ 中，$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=60°$，且 ΔAPB 、 ΔBPC 、 ΔCPA 的面積分別為 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 、2、1，則這個四面體 $PABC$ 的體積為____________。



7. 第一次段考某班全部學生的國文測驗成績平均為 54 分，標準差為 6 分；國文寫作成績平均為 16 分，標準差為 4 分，兩分數相加後所得總成績的標準差為 $2\sqrt{23}$ ，若國文測驗分數為 x ，國文寫作成績為 y ，且 y 對 x 的迴歸直線方程式為 $y=ax+b$ ，則數對 $(a,b)=$____________。

8. 將兩個 a 和兩個 b 共四個字母填入如下圖所示的 16 個小方格內，每個小方格內至多填一個字母，若相同的字母必須不同行也不同列，則共有____________種不同的填法。



9. 已知直線 $L:6x-5y-28=0$ 交橢圓 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0,$ 且 a,b 皆為正整數$)$ 於兩點 A 、C ，且 $B(0,b)$ 為橢圓 Γ 的頂點。若 ΔABC 的重心 G 恰為橢圓的右焦點 $F_2(c,0)$ ，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$ ，則橢圓 Γ 的正焦弦長為____________。

10. 設 O 為 ΔABC 的外心，若 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ ，則 $\sin\angle BAC=$____________。

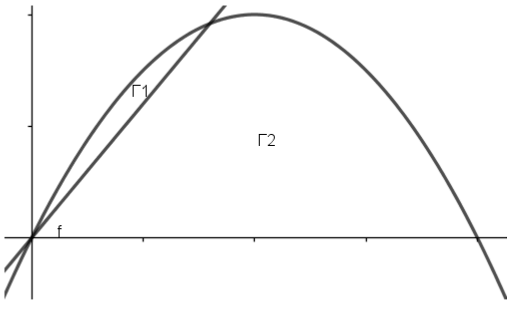
二、填充題乙(每一格皆為 5 分，共 8 格，總共為 40 分)

11. 在空間中，有三個不共平面的非零向量 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{c}$ ，滿足 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot((\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}))=7$ ，求以三向量 $(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$ 、 $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c})$ 、 $(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$ 所張成的平行六面體體積為____________。

12. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & -4 & 5\end{bmatrix}$ 、 $I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ，且 $B=(I+A)^{-1}(I-A)$ ，求矩陣 $(I+B)^{-1}=$____________。

13. 已知數列 $<a_n>$ 滿足 $\begin{cases}a_0=1 & \\ a_{2k+1}=a_k & ,k\in N\cup\{0\}\\ a_{2k+2}=a_k+a_{k+1} & ,k\in N\cup\{0\}\end{cases}$ ，求 $\sum_{k=0}^{63}a_k=$____________。

14. 設 Γ 是由 $y=2x-x^2$ 與 x 軸所圍成的平面圖形，直線 $y=kx$ 將 Γ 分成兩部分(如下圖所示)，若 Γ_1 與 Γ_2 的面積分別為 S_1 與 S_2 ，且 $S_1:S_2=1:7$ ，求 Γ_1 繞 y 軸旋轉一圈的旋轉體體積為____________。



15. 設 ΔABC 的三邊長分別為 a, b, c ，且 $a+b+c=12$ ，求 $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{4b}{c+a-b}+\dfrac{9c}{a+b-c}$ 的最小值為____________。

16. 已知 ΔABC 中，$\angle BAC=90°$ ，$\overline{AB}=1$ ，$\overline{AC}=\sqrt{3}$ ，若 P 點在 ΔABC 內部且滿足 $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{PB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{PC}}{\left|\overrightarrow{PC}\right|}=\overrightarrow{0}$ ，

求序對 $(\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC})=$____________。

17. 某電子玩具按下按鈕後，只會出現紅球或白球。若某次出現為紅球，則下次按下按鈕後出現紅球、白球的機率分別為 $\dfrac{1}{3}$ 、$\dfrac{2}{3}$ ；若某次出現為白球，則下次按下按鈕後出現紅球、白球的機率分別為 $\dfrac{3}{5}$ 、$\dfrac{2}{5}$ 。已知第一次按下按鈕後出現紅球和白球的機率相等，求第 n 次按下按鈕後出現紅球的機率為____________。

18. 設 $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ 且 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ ，求 $\cos\alpha$ 的最大值為____________。