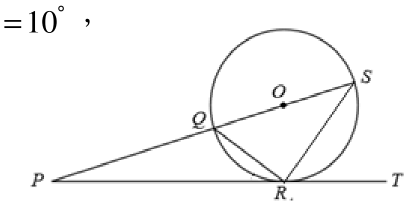
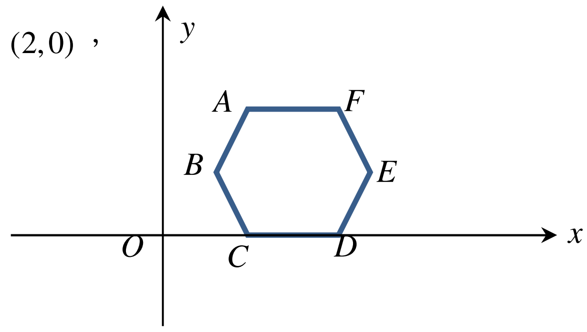
國立臺中第一高級中學 105 學年度
學術性向資賦優異【數理類】學生入班鑑定安置計畫
數學實作　試題卷

一、填充題(每題 6 分，共 66 分。請將答案填寫於答案卷的空格中，題目中圖形僅供參考，未必精確。)

1. 如圖，已知直線 $\overleftrightarrow{PT}$ 與圓 O 相切於 R 且直線 $\overleftrightarrow{SQ}$ 與直線 $\overleftrightarrow{PT}$ 相交於 P。設 $\angle QPR = 10^\circ$，
   則 $\angle PSR =$ ______ 。



2. 坐標平面上有一正六邊形 $ABCDEF$，其中 C、D 兩點坐標分別為 $(1,0)$、$(2,0)$，
   若在沒有滑動的情況下，將此正六邊形沿著 x 軸向右滾動，
   則在滾動過程中，A 點經過 $(2016,k)$，則 k 值為______ 。



3. 求方程式 $\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{12}$ 的解為________ 。

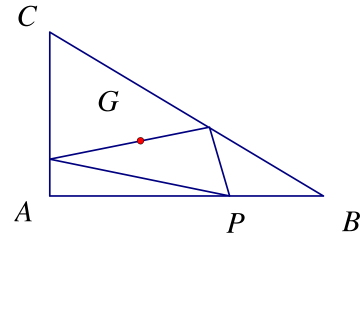
4. 若 a,b,c 為實數，則 $2(a+b+c)^2+(ab-6)^2+(bc-6)^2+(ca-6)^2$ 之最小值為______ 。

5. 已知有編號 $1,2,3,4,5,6$ 的球各一顆，小串任意拿出若干個球，使得這些球的編號和為偶數(不考慮順序)，則共有________種取法。(小串至少拿一顆球)

6. 若 a 為小於 2016 的正整數，若 $(a^2-24)(a^2-3)+49$ 不是質數，則滿足條件的 a 值有______個。

7. 已知有三個不同大小的正 ΔABC、正 ΔDEF、正 ΔGHI。其中 ΔABC 和 ΔDEF 有共同的中心且 $\overline{AB}\,//\,\overline{EF}$。$\Delta GHI$ 的頂點在 ΔABC 的邊上，而 ΔDEF 的頂點在 ΔGHI 的邊上，若 ΔABC 的面積為 2016，而 ΔDEF 和 ΔGHI 的面積值皆為正整數，則 ΔGHI 面積的最大值為________ 。

8. 如圖，在直角 ΔABC 中，$\overline{AB}=3\sqrt{3}$、$\overline{AC}=3$，$\angle A=90^\circ$。點 P 是邊 $\overline{AB}$ 上異於 A,B 的一點，光線從點 P 出發，經 $\overline{BC},\overline{CA}$ 反射後又回到原點 P（根據反射原理：入射角等於反射角）。若光線經過 ΔABC 的重心 G，則 $\overline{BP}$ 長為______ 。



9. 設數列$\{a_n\}$的前 n 項和為 S_n，若對任意正整數 n，數列中總存在一項$a_m = S_n$ (m,n 可能相同)，則稱$\{a_n\}$為 H 數列。

例如：$\{a_n\}=\{n\}$，$S_1=1=a_1$，$S_2=3=a_3$，$S_3=6=a_6$，……，$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}=a_{\frac{n(n+1)}{2}}$，故$\{n\}$為 H 數列。

請問有_________個數列$\{a_n\}$滿足以下條件：

(1) $\{a_n\}$是首項為 2016，公差為整數的等差數列。

(2) $\{a_n\}$是 H 數列。

10. 若凸 n 邊形 n 個內角的度數皆是整數且互不相等，已知最大內角的度數是最小內角的度數的 2 倍，則 n 的最大值為__________。

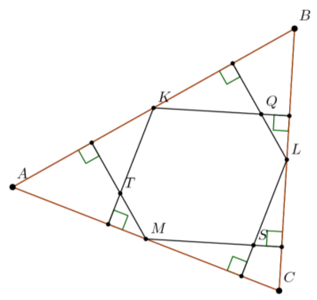
11. 若 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 皆為實數，且滿足$\begin{cases} x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5=-2 \\ x_2x_1+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5=-2 \\ x_3x_1+x_3x_2+x_3x_4+x_3x_5=-2 \\ x_4x_1+x_4x_2+x_4x_3+x_4x_5=-2 \\ x_5x_1+x_5x_2+x_5x_3+x_5x_4=-2 \end{cases}$，則 $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+x_5^3$ 之最大值為________。

二、計算與證明題：(共 34 分，配分如下，請標示題號，並將詳細過程寫在答案卷的計算證明題空格中)

1. (1)化簡$\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\dfrac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\dfrac{1}{(n-2)\times(n-1)\times n}$。(4 分)

(2)利用(1)，證明$1+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{n^3}<\dfrac{5}{4}$，其中 n 為大於 2 的正整數。(4 分)

2. 在銳角ΔABC 中，K、L、M 分別為$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$的中點，從 K 作$\overline{BC}$、$\overline{CA}$的垂線，接著從 L 作$\overline{AB}$、$\overline{CA}$的垂線，再從 M 作$\overline{AB}$、$\overline{BC}$的垂線，若垂線相交於 Q、S、T。證明六邊形 $KQLSMT$ 的面積為 ABC 面積的一半。(7 分)



3. 已知a,b均為質數且$a<b$，

(1) 若$a>3$，證明$2ab>2a+2b+ab-31>0$。(4 分)

(2) 若$\dfrac{2b-31}{a},\dfrac{2a-31}{b}$均為整數，證明$\dfrac{2a+2b+ab-31}{2ab}$為整數。(3 分)

(3) 若$\dfrac{2b-31}{a},\dfrac{2a-31}{b}$均為整數，利用以上結果，求數對$(a,b)$。(3 分)

4. 已知$[x]$是不超過 x 的最大整數，例如$[3]=3,[1.3]=1,[-1.3]=-2$，

已知 $f(x)=\left[\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3}\right]+\left[\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3}\right]+\left[\dfrac{x}{3^2}+\dfrac{1}{3}\right]+\left[\dfrac{x}{3^2}+\dfrac{2}{3}\right]+\cdots+\left[\dfrac{x}{3^{2016}}+\dfrac{1}{3}\right]+\left[\dfrac{x}{3^{2016}}+\dfrac{2}{3}\right]$，

(1)求 $f(21)$。(2 分)

(2)求 $f(12345)$。(3 分)

(3)若$1<k<3^{2016}$，則 $f(k)$ 為多少？請說明理由。(4 分)

試題結束

簡答

一、填充題

1. 40° **2.** $\sqrt{2}$ **3.** $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},-2\pm\sqrt{3}$ **4.** 81 **5.** 31 **6.** 2013 **7.** 1848 **8.** $\sqrt{3}$ **9.** 37

10. 22 **11.** 13

二、計算證明題

1. $1+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{n^3}<1+\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}$

$$=1+\frac{1}{2}\times[(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3})+(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4})+\cdots+(\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)})]=1+\frac{1}{2}\times(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{n(n+1)})<\frac{5}{4}$$

2. 略

3. (1)(2)略 (3) (3, 5)

4. (1) 21 (2) 12345 (3) $[k]$