102 年大同高中數學科部分試題

13. $a,b,c>1$

證明 $2(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a})\geq\frac{9}{a+b+c}$

12.n 為正奇數

證明 256整除$n^8-n^6+n^4-3n^2+2$

11. n 為自然數，$p\geq -2$，證明 $(1+\mathrm{p})^{\mathrm{n}}\geq 1+np$

10.n 為自然數，證明若 $2+2\sqrt{28n^2+1}$ 是自然數，則 $2+2\sqrt{28n^2+1}$ 為完全平方數

9. 描繪 $y=-2+\sqrt{-x^2+6x+7}$ 的圖形，並求 $\int_1^7(-2+\sqrt{-x^2+6x+7})dx$ 之值。

7. $3^{2x+1}+(m-1)(3^{x+1}-1)-(m-3)3^x=0$ 有兩個不同正根，求 m 範圍。

6. $a,b>0$，$2ab+3a+6b=27$，求 a^2+4b^2 的最小值。

4. $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4$ 展開式中，x^{12} 的係數。

2. $10\leq n\leq 110$，$\frac{n^2-9}{n^2-7}$ 為最簡分數，n 有幾個？

$a,b,c>1$

證明$2(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a})\geq\frac{9}{a+b+c}$

[Pf]

由柯西不等式:

$$\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right)(a+b+b+c+c+a)\geq\left(\sqrt{\log_b a}+\sqrt{\log_c b}+\sqrt{\log_a c}\right)^2$$

等號成立於$\frac{\log_b a}{(a+b)^2}=\frac{\log_c b}{(b+c)^2}=\frac{\log_a c}{(c+a)^2}$

又根據算幾不等式

$$\frac{\sqrt{\log_b a}+\sqrt{\log_c b}+\sqrt{\log_a c}}{3}\geq\sqrt[3]{\sqrt{\log_b a}\cdot\sqrt{\log_c b}\cdot\sqrt{\log_a c}}=1$$

$$\left(\sqrt{\log_b a}+\sqrt{\log_c b}+\sqrt{\log_a c}\right)^2\geq 9$$

等號成立在$\sqrt{\log_b a}=\sqrt{\log_c b}=\sqrt{\log_a c}$

即$\frac{\log a}{\log b}=\frac{\log b}{\log c}=\frac{\log c}{\log a}$，易知$\log a=\log b=\log c\Rightarrow a=b=c$

柯西不等式部分欲檢驗是否有$\frac{\log_b a}{(a+b)^2}=\frac{\log_c b}{(b+c)^2}=\frac{\log_a c}{(c+a)^2}$

$a=b=c$在此條件下，易驗證等號成立

所以

$$\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right)(a+b+b+c+c+a)$$

$$\geq\left(\sqrt{\log_b a}+\sqrt{\log_c b}+\sqrt{\log_a c}\right)^2\geq 9$$

$2\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right)\geq\frac{9}{a+b+c}$　得證

10.由題目條件知$28\mathrm{n}^2+1=m^2$，m，$n\in Z$

$\Rightarrow\left(\mathrm{m}+2\sqrt{7}n\right)\left(m-2\sqrt{7}n\right)=1\Rightarrow\left(\mathrm{m}，\mathrm{n}\right)=\left(1，0\right)，\left(-1，0\right)$

所以$28\mathrm{n}^2+1$只能是 1

則原式的$2+2\sqrt{28\mathrm{n}^2+1}=2+2=4$為完全平方數