利用歐拉公式求分割區域數

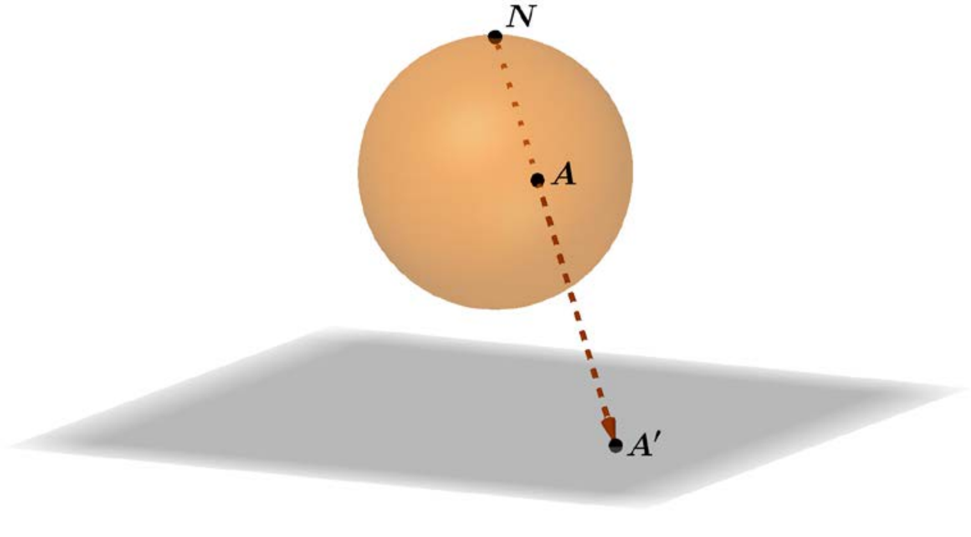
廖培凱

臺北市立第一女子高級中學數學科教師

在[1]中，許閔揚老師提出利用遞迴關係式，得到平面上 n 條直線與 m 個圓分割出最多區域的數量為 $\dfrac{n^2+n+2}{2}+2mn+m^2-m$。除了使用遞迴關係外，亦可使用歐拉公式：$V+F-E=\chi$ 得到此式，其中 V 為交點的個數，E 為線段的個數（包含線段、曲線段、直線、曲線等），F 為分割區域的數量，χ 為歐拉示性數（Euler characteristic）。

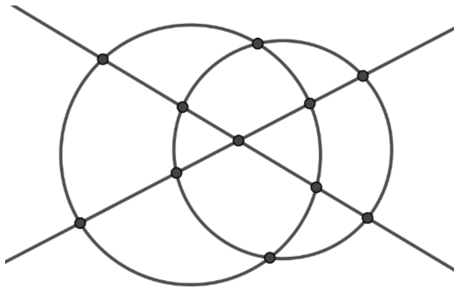
一、歐拉公式

大家比較熟悉的歐拉公式是 $V+F-E=2$，只要和球面同胚的多面體都可以套用這個公式，以前的教材也利用這個結果證明總共只有 5 種柏拉圖正多面體。在平面上討論時，其實只要直線或曲線往外無線延伸的部份視為全都交會在同一點（無窮遠點），亦可使用這個公式。這就像是將點光源放在球面 S^2 的北極 N 點上，則 $S^2-\{N\}$ 的任一點都可以投影到球面外與赤道平行的平面上之一點，實際上這個投影的方式可讓球面與平面上的這兩點形成一一對應，再將平面上的無窮遠處視為北極 N 的對應點，則有 $S^2\cong R^2\bigcup\{\infty\}$。



舉一些例子試驗看看：一條直線可將平面分成兩塊區域，直線兩方向無限延伸到無窮遠處，視為在無窮遠處相交於一點，則 $E=1$，$V=1$，故分割的區域數 $F=E-V+2=2$。若是平面上只有一個圓的情況，因為圓本身形成一個封閉區域，應在圓上先取點再作記數，例如圓上取一點時，$E=1$，$V=1$，故分割出最多的區域數 $F=E-V+2=2$，在圓上取兩點也可以，則 $E=2$，$V=2$，

同樣也可算出分割最多的區域數$F=E-V+2=2$。又或者複雜一點的例子，兩條直線與兩個圓的情況，由下圖可看出，$E=24$，$V=12$（包含無窮遠點），則在平面上分割出最多的區域數為$F=E-V+2=24-12+2=14$。因此，欲求出在平面上 n 條直線與 m 個圓所分割的最多區域數，只要求出交點個數 V、線段數 E，再代入$F=E-V+2$即可導出分割出來的最多區域數。



$$V=12$$

$$E=24$$

$$\begin{aligned}F&=E-V+2\\&=24-12+2\\&=14\end{aligned}$$

二、直線與圓分割平面的區域數

因為 n 條直線在平面上最多有 $C_2^n=\dfrac{n^2-n}{2}$ 個交點，再加上無窮遠處 1 個交點，而 m 個圓最多有 $2C_2^m=m^2-m$ 個交點，n 條直線與 m 個圓最多有 $2mn$ 個交點，若也將 n 或 m 可能為 0 的情況考慮進去，則可列出交點個數

$$V=\begin{cases}m^2-m & ,n=0,m\in\mathbb{N}\cup\{0\};\\ \dfrac{n^2-n}{2}+m^2-m+2mn+1 & ,n\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}\cup\{0\}.\end{cases}$$

而每一條直線最多可被其餘的$n-1$條直線和 m 個圓截出$n+2m$段，每一圓最多可被其餘的$m-1$個圓和 n 條直線截出$2(m-1)+2n$段，故總共的線段數為

$$E=n(n+2m)+m\big(2(m-1)+2n\big)=n^2+2m^2+4mn-2m,$$

因此所分割出最多的區域數為

$$F=E-V+2=\begin{cases}m^2-m+2 & ,n=0,m\in\mathbb{N};\\ \dfrac{n^2-n}{2}+m^2+2mn-m+1 & ,n\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}\cup\{0\}.\end{cases}$$

三、多項式函數圖形分割平面的區域數

仿照這個方法，只要知道直線或曲線的交點個數、所截線段數，就可以求出分割出的最多區域數量。例如：當 m、n、p、q 都是自然數且 $p>q$ 時，m 個 p 次函數圖形與 n 個 q 次函數圖形，最多可將一平面分割成幾個區域呢？

首先，可由代數基本定理知 k 次方程式最多有 k 個實根，因此每個 p 次函數圖形分別和其餘的 $m-1$ 個 p 次函數圖形與 n 個 q 次函數圖形最多有 $(m+n-1)p$ 個交點，每個 q 次函數圖形分別和其餘的 m 個 p 次函數圖形和 $n-1$ 個 q 次函數圖形最多有 $mp+(n-1)q$ 個交點，而每個交點都被兩條曲線各算過一次，再加上這些函數圖形兩端都無限延伸到無窮遠點，故可算出交點總數

$$V=\frac{m(m+n-1)p+n\big(mp+(n-1)q\big)}{2}+1.$$

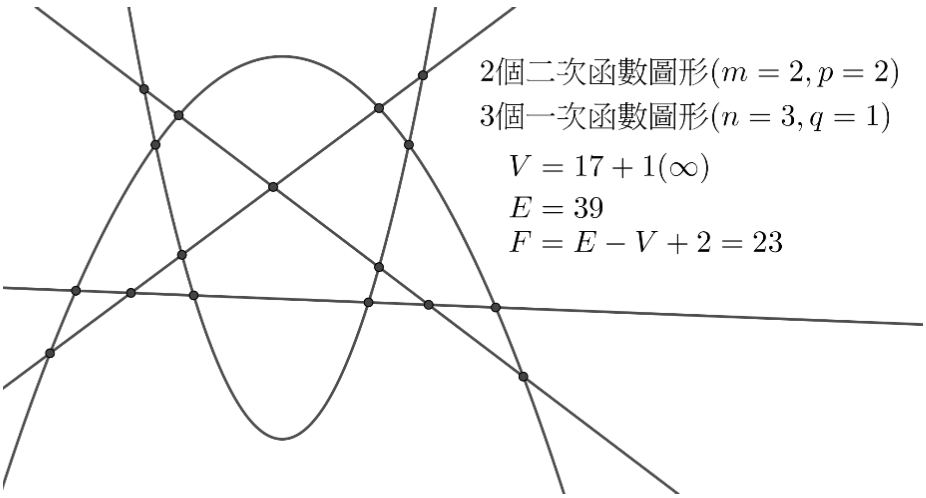
而每條曲線被截出的線段數為該曲線上交點數加 1，故所有的線段數為

$$E=m\big((m+n-1)p+1\big)+n\big(mp+(n-1)q+1\big),$$

代入歐拉公式 $F=E-V+2$，可得所分割出最多的區域數為

$$F=\frac{m^2p+n^2q-mp-nq}{2}+mnp+m+n+1.$$

舉例來說，當 m 和 n 都為自然數時，利用 n 個一次函數圖形（斜直線）與 m 個二次函數圖形（開口向上或向下的拋物線），可得所分割出最多的區域數為 $F=\frac{n^2-n}{2}+m^2+2mn+1$。下圖為 2 個二次函數與 3 個一次函數在平面上分割的最多區域數。



四、圓上 *n* 點所決定的弦分割的區域數

再看一例：若給定圓上 n 個點，則這 n 點所決定的弦，最多可將圓分割成幾塊區域？

假設圓上的這 n 個點依序為 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ ，則弦 $\overline{A_1A_k}$ ，將圓分開的兩弧上

各有 $k-2$ 和 $n-k$ 個點，則這 $n-2$ 個點形成的弦，可在圓內與 $\overline{A_1A_k}$ 產生 $(k-2)(n-k)$ 個交點，故由點 A_1 延伸出去的所有弦上，在圓內最多總共有 $\sum_{k=2}^{n}(k-2)(n-k)$ 個交點，同理，從其他點延伸出去的弦也有這麼多交點，但每個交點都會被計算到 4 次（因為相交兩弦共有 4 個端點在圓上，由每個端點計數時都會算到一次，實際上用這個觀點可以直接得出圓上任四點產生的弦會在圓內產生一個交點，故圓內交點個數為 C_4^n，但這個方法不易算出所截線段數），故圓內交點數共有

$$\frac{n}{4}\cdot\sum_{k=2}^{n}(k-2)(n-k)=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24},$$

再加上圓上 n 個點，即為 V 的值，即

$$V=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+n.$$

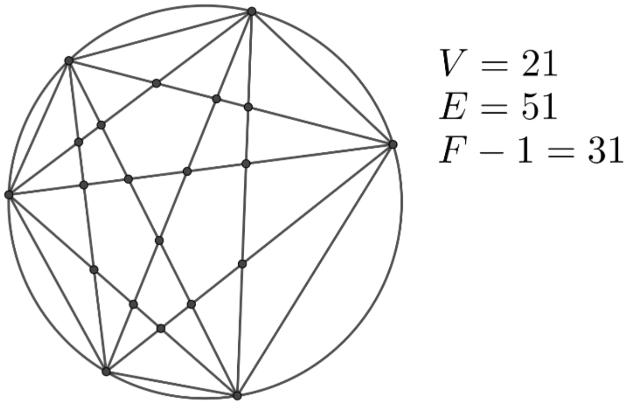
而由上述說明可知，每條弦在圓內交點數加 1 即為被其他各弦所截的線段數，再加上圓上由給定的 n 個點所截的 n 個弧，可得

$$E=n+\frac{n}{2}\sum_{k=2}^{n}\big((k-2)(n-k)+1\big)=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}+\frac{n(n-1)}{2}+n,$$

故整個平面被圓與弦所分割的區域數 F 再扣掉圓外的區域，即為所求：

$$F-1=E-V+1=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)}{2}+1.$$

例如：圓上 6 個點決定的弦，最多共有 21 個交點（$V=21$），圓內線段數及圓上的弧最多共有 51 條（$E=51$），在圓內所分割的區域最多有 $F-1=E-V+1=51-21+1=31$ 個，如下圖。



五、結語

現在的課程已不見歐拉公式，但是透過簡單的觀察與引導，仍可使學生理解與應用歐拉公式，筆者最近正好教完高一的數列與級數，進入排列組合的單元時，讓學生討論並計算本文中「圓上 n 點決定的弦將圓分割成的區域數」的問題，透過計算交點個數、所截線段數，再搭配歐拉公式計算分割區域數的過程中，更見學生的巧思，例如有學生想像把圓周在空間中拉起來收成一個點（contract to a point），將圓上所有的弦看成只是一條在球面上反覆通過該點的路徑，再藉由已知圓內有 C_2^n 條弦及 C_4^n 個交點，便推算出圓內的線段數為 $2C_4^n+C_2^n$，足見學生已有轉化問題的能力。恰好拜讀許老師的文章，便將最近教學心得亦著文分享，也恭請師長們不吝指教。

參考資料

1. 許閔揚(2020)。直線與圓分割平面的區域數公式。數學學科中心電子報，157。