臺北市立大理高級中學 109 學年度代理教師甄選初試 (筆試) 試題

初試科目：高中數學科　　　　　　　　　　考試日期：109 年 7 月 6 日 (一)

注意事項: 請自行掌握時間分配, 依序書寫於所附答題紙中, 本次考試不再另加答題紙. 未依序作答者, 該題不予計分.

計算申論題 (共計 100 分, 每題 20 分, 每題請先說明解題策略 (佔一半題分))

1. 平面上 $\triangle ABC$ 中, $2\overline{AB}=\overline{AC}$、$\cos A=\dfrac{3}{5}$, 若通過三頂點的水平線方程式為 $y=0, y=1, y=2$, 且 A 點在 y 軸上. 試求:

   (1) 所有可能的三頂點坐標　　　　(2) 所有可能的三角形面積

2. 小新 和 風間 從甲乙兩箱中分別隨機取出一顆球, 兩人球號碼大者為勝,

   甲箱裝有編號 $\{1,3,\dots,3^{k-1},\dots,3^{n-1}\}$ 共 n 顆球 (正整數 $n\geqslant 3$),

   乙箱裝有編號 $\{2,6,\dots,2\times3^{k-1},\dots,2\times3^{n-1}\}$ 共 n 顆球.

   取球前由 小新 先選箱子 (外部有標示甲乙), 風間 再從剩下的箱子取球. 這時 小新 發現先選者勝的機率較大, 風間 也同意此觀點並分別提出建議方案: 風間 說只要拿走某箱子一顆球, 輸贏機率就相等; 小新 則把取球個數變成兩顆, 再運用這兩個號碼運算後比大小. 試問:

   (1) 小新 一開始選甲乙兩箱贏的機率分別是多少?

   (2) 風間 的方案要拿走哪一顆球?

   (3) 小新 的方案可行嗎? 要如何運算? (甲乙箱球號運算方式要相同)

3. 空間中, 四面體 $PABC$ 的邊長為:

$$\overline{AB}=3, \overline{BC}=\sqrt{13}, \overline{CA}=2, \overline{PA}=\sqrt{5}, \overline{PB}=\sqrt{8}, \overline{PC}=3.$$

若平面 E 垂直 $\triangle ABC$ 且平行 $\overline{AC}$ 邊, 令點 P' 為 P 點在 $\overline{AB}$ 邊的投影, 點 Q 為 E 與 $\overline{AB}$ 邊的截點. 試求:

(1) 平面 ABP 與 ABC 的兩面角

(2) E 與四面體所截之多邊形面積最大值為何? 此時 $\lambda=\dfrac{1}{\overline{AQ}}-\dfrac{1}{\overline{AP'}}=?$

(3) 將 P 點變更為: 不在平面 ABC 上且點 P' 在 $\overline{AB}$ 邊上 (非端點), 證明截面積有最大值時 λ 為定值.

4. 平面上拋物線 $y=f(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{R}[x]$, 已知 $f(p)=m^2, f(q)=n^2$, 其中實數 $p>q,\ m,n>0$. 試問:

(1) 若 $y=f(x)$ 圖形與 x 軸相切, 求切點坐標.

(2) 若方程式 $f(x)=0$ 的兩根在區間 (q,p) 中, 求 a 的最小值.

5. 給定正整數 $a>b$, 對任意正整數 n 皆存在正整數 m, 使得:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^n=\sqrt{m+1}-\sqrt{m}.$$

試問:

(1) 找出並證明符合此條件的所有數對 (a,b)

(2) 數對 (a,b) 的方程式 $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3=\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$, 在 m 是哪些正整數時, 沒有正整數對解?

臺北市立大理高級中學 109 學年度代理教師甄選初試 (筆試) 簡答

初試科目：高中數學科　　　　　　　　　　　　考試日期：109 年 7 月 6 日 (一)

1. (1) 坐標： $A(0,0),\left(\frac{1}{2},1\right),(-1,2)$、$A(0,0),\left(\frac{17}{4},1\right),\left(\frac{7}{8},2\right)$、$A(0,1),\left(\frac{11}{8},0\right),\left(\frac{13}{4},2\right)$

   與分別對稱於直線 $y=1, x=0$ 與以點 $(0,1)$ 為中心旋轉 180° 的三角形共 12 個

   (2) 面積: $1, \frac{61}{16}, \frac{37}{16}$

2. (1) 甲: $\frac{n-1}{2n}$, 乙: $\frac{n+1}{2n}$

   (2) 1 或 $2\cdot 3^{n-1}$

   (3) 兩數相除 (大 ÷ 小或小 ÷ 大) 之商或其他等價方法.

3. (1) 90°

   (2) $\frac{3}{2}$, $\lambda=\frac{1}{3}$

   (3) $\lambda=\frac{1}{\overline{AB}}$

4. (1) x 坐標為 $\frac{mq+np}{m+n}$ 與 $\frac{mq-np}{m-n}$ ($m\neq n$ 時)

   (2) $\frac{(n+m)^2}{(p-q)^2}$

5. (1) $a=b+1$, $b\in\mathbb{N}$

   (2) $m\neq b(4b+3)^2$, $b\in\mathbb{N}$