直線與圓分割平面的區域數公式

許閎揚

彰化縣立彰化藝術高中數學科教師

前言：

在高中數列級數單元學生一般會學到n條直線將平面分割成幾個區域？或n個圓將平面分割成幾個區域？這些問題都極為有趣，為了滿足更多的好奇心，我們想知道更一般的公式即平面上有n條直線m個圓將平面分割的區域數。

本文：

在一般組合學書籍中, 我們可以找到如下結果：

定理 1([3])：平面n條直線（其中任兩條均不平行，任三條均不共點），將平面分成

$$\frac{n^2+n+2}{2}$$

個區域。

我們可以將上面定理推廣成如下定理：

定理 2：平面n條直線（其中$n\geq 1$且任兩條均不平行，任三條均不共點），m個圓（其中任兩圓有兩個相異交點、任三圓不共點），每條直線與圓有兩交點，且不存在某圓過某兩直線的交點或某一直線過某兩圓的交點之情形，將平面分成

$$\frac{n^2+n+2}{2}+2nm+m^2-m$$

個區域。

[證明] 令 $f(n,m)$ 為平面上n條直線與m個圓將平面分割的區域數。
設平面上已有n條直線與$m-1$個圓，則第m個圓放入時與n條直線有$2n$個交點與$m-1$個圓有$2(m-1)$個交點，由題意這些點皆相異，所以第m個圓上有$2n+2(m-1)$個交點，這些交點將圓分割成$2n+2(m-1)$個弧，每個弧將原有區域分成 2 個部分，所以我們有如下遞迴式

$$f(n,m)=f(n,m-1)+2n+2(m-1),$$

$$n\geq 1,\ m\geq 1.$$

所以

$$
\begin{aligned}
f(n,1) &= f(n,0)+2n \\
f(n,2) &= f(n,1)+2n+2\times 1 \\
f(n,3) &= f(n,2)+2n+2\times 2 \\
&\vdots \\
f(n,m) &= f(n,m-1)+2n+2(m-1)
\end{aligned}
$$

將上面各等式全部加起來，將等號兩邊對消後可得

$$f(n,m)=\frac{n^2+n+2}{2}+2nm+m^2-m,$$

$$n\ge 1,\ m\ge 1.$$

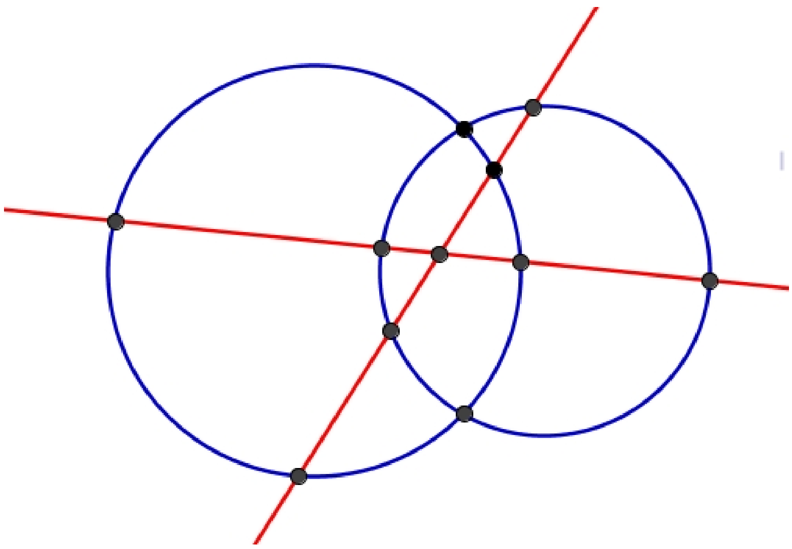
當 $m=0$ 時上面等式右邊為 $\dfrac{n^2+n+2}{2}$， 等於 n 條直線分割平面區域數。

所以

$$f(n,m)=\frac{n^2+n+2}{2}+2nm+m^2-m,$$

$$n\ge 1, m\ge 0.$$

例如：如下圖 $f(2,2)=14$.



參考書目:

1. R. Brualdi. (2009). Introductory Combinatorics. 5th edition, Pearson.
2. C. L. Liu. (1968). Introduction To Combinatorial Mathematics. McGraw-Hill Book Company.
3. R. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik (1994). Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. Addison-Wesley Professional, 2nd edition.