| 新北市立板橋高級中學 109 學年度 | 准考證號 | |
|---|---|---|
| 第一次教師甄選【數學科】試題卷(公告版) | | |

壹、填充題：每題 6 分，共 66 分。(各題答案須將最終數值算出，並化為最簡型式)

1. 設 $f(x)$為實係數三次多項式，且 $\alpha$ 、$\beta$ 、$\gamma$ 為 $f(x)=0$ 的根 ，若 $\dfrac{f(\frac{1}{3})+f(-\frac{1}{3})}{f(0)}=120$ ，

   求 $\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}$ 之值=________。

2. 若複數 $(z^2-8)$ 與 $(z^2+8)$ 的主幅角分別為 $\dfrac{5\pi}{6}$ 與 $\dfrac{\pi}{3}$ ，求複數 $z=$ ________。(請以標準式作答)

3. 對於正整數 $n$， 設 $(1+i)^n=a_n+ib_n$，其中 $i=\sqrt{-1}$ 且 $a_n$、$b_n$ 為實數。

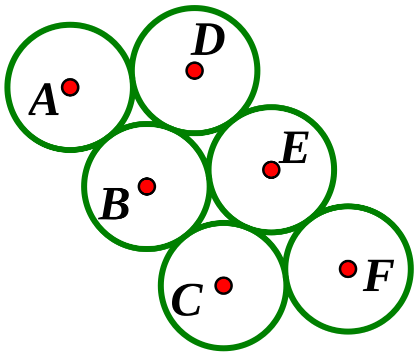
   已知 $a_n$、$b_n$ 會滿足矩陣乘法 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，試求矩陣 $T^{26}$ =________。(須寫出各元素的值)

4. 設四次多項式 $f(x)=-x^4+2x^3-x^2+2x$ ，選取積分區間 $a\le x\le b$

   使得定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 達到最大值，求此定積分的最大值 =________。

5. 如右圖，圓 A,B,C,D,E,F 都是半徑為 1 的圓，且相鄰的兩圓皆相切，若 ***P*** 是圓 A 上的動點，***Q*** 是圓 F 上的動點，求

   $\overline{PQ}$ 長度的最大值是 _____ 。




6. 數字都是"1"的數列 1,11,111,1111,----(第 k 項是 k 個 1)-----，設此數列前 100 項的和是 S，求 S 的末 10 位數的數字是__________________。

   (例如：12345678 的末 6 位數的數字是"345678")

7. 設函數 $f(x)=\cot x+15\tan x+25\tan^2 x$ ，其中 **0°<*x*<90°**，則 $f(x)$的最小值是____________。

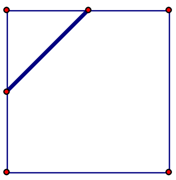
8. 有 10 張椅子排成一列，甲、乙、丙、丁、戊 5 人分成三組入座，三組人數分別為 1 人、2 人、2 人，求同組相鄰，不同組不相鄰之坐法有_________種。

9. $\Delta$OAB 中，若 $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{AB} = x$， $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BO} = y$， $\overrightarrow{BO} \bullet \overrightarrow{OA} = z$，試以 $x,y,z$ 來表示$\Delta$OAB 的面積為 ________________________。

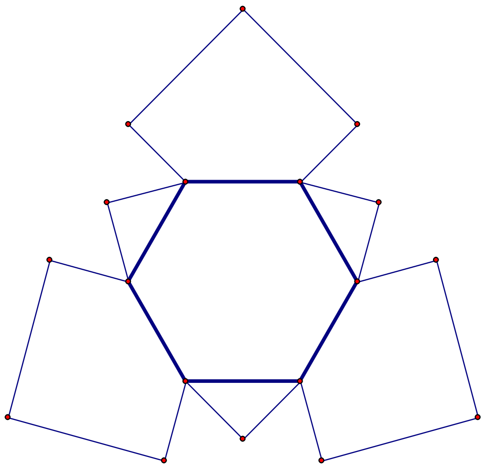
10. 設 $A(0, 0, 6)$，$B(0, 0, 20)$為空間中的兩個定點，$P(x, y ,0)$為一個動點，若$0 \le x \le 15$， $0 \le y \le 15$，$\angle APB \ge 30°$，求 $P$ 點之軌跡所成之圖形的面積______________。

11. 如下圖一，將三個邊長為 12 的正方形紙片，分別取其中相鄰兩邊中點的連線切成一個等腰直角三角形和一個五邊形。如下圖二，將這 3 個等腰直角三角形、3 個五邊形和 1 個邊長為$6\sqrt{2}$的正六邊形，沿著粗線向上折成一角錐多面體，求此角錐多面體的體積是___________。
(紙片厚度忽略不計)

圖一



圖二



| 新北市立板橋高級中學 109 學年度 | 准考證號 | |
| --- | --- | --- |
| 第一次教師甄選【數學科】試題卷（記憶版） | | |

貳、計算題：共 22 分。

1. 平面上有一橢圓，已知其焦點為 $(0,\ 0)$ 和 $(8,\ 8)$ ，且 $y=x+2\sqrt{2}$ 為此橢圓的切線，則此橢圓的方程式為何？（請表示為 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=4$ 的型式）（10 分）

2. 設 $[x]$ 表不大於 $x$ 的最大整數，$\langle x\rangle$ 表不小於 $x$ 的最小整數。
   試求 $x(2x+1)-2x([x]+\langle x\rangle)+2([x]^2+\langle x\rangle^2)=67$ 的 $x$ 值。（12 分）

參、證明題：共 12 分。

1. 設 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ ，證明數列 $\langle a_n\rangle$ 遞增有上界。（12 分）

| 新北市立板橋高級中學 109 學年度 | 准考證號 | |
| --- | --- | --- |
| 第一次教師甄選【數學科】試題卷(公告版) | | |

壹、填充題：每題 6 分，共 66 分。(各題答案須將最終數值算出，並化為最簡型式)

1. 設 $f(x)$為實係數三次多項式，且 $\alpha$ 、$\beta$ 、$\gamma$ 為 $f(x)=0$ 的根，若 $\dfrac{f(\frac{1}{3})+f(-\frac{1}{3})}{f(0)}=120$，

   求 $\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}$ 之值=________。

2. 若複數 $(z^2-8)$ 與 $(z^2+8)$ 的主幅角分別為 $\dfrac{5\pi}{6}$ 與 $\dfrac{\pi}{3}$，求複數 $z=$ ________。(請以標準式作答)

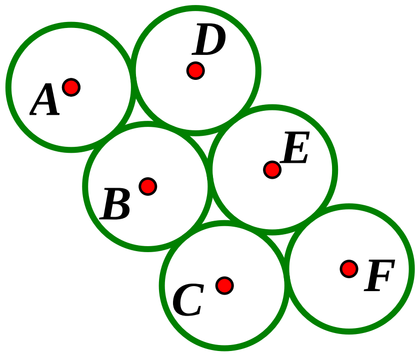
3. 對於正整數 $n$，設 $(1+i)^n=a_n+ib_n$，其中 $i=\sqrt{-1}$ 且 $a_n$、$b_n$ 為實數。

   已知 $a_n$、$b_n$ 會滿足矩陣乘法 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，試求矩陣 $T^{26}$ =________。(須寫出各元素的值)

4. 設四次多項式 $f(x)=-x^4+2x^3-x^2+2x$，選取積分區間 $a\le x\le b$

   使得定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 達到最大值，求此定積分的最大值 =________。

5. 如右圖，圓 A,B,C,D,E,F 都是半徑為 1 的圓，且相鄰的兩圓皆相切，若 ***P*** 是圓 A 上的動點，***Q*** 是圓 F 上的動點，求 $\overline{PQ}$ 長度的最大值是 _____ 。




6. 數字都是"1"的數列 1,11,111,1111,----(第 k 項是 k 個 1)-----，設此數列前 100 項的和是 S，求 S 的末 10 位數的數字是__________________。

   (例如：12345678 的末 6 位數的數字是"345678")

7. 設函數 $f(x)=\cot x+15\tan x+25\tan^2 x$，其中 **0°<*x*<90°**，則 $f(x)$的最小值是____________。

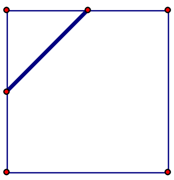
8. 有 10 張椅子排成一列，甲、乙、丙、丁、戊 5 人分成三組入座，三組人數分別為 1 人、2 人、2 人，求同組相鄰，不同組不相鄰之坐法有_________種。

9. $\Delta$OAB 中，若 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{AB}=x$，$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BO}=y$，$\overrightarrow{BO}\bullet\overrightarrow{OA}=z$，試以 $x,y,z$ 來表示$\Delta$OAB 的面積為 ______________________ 。

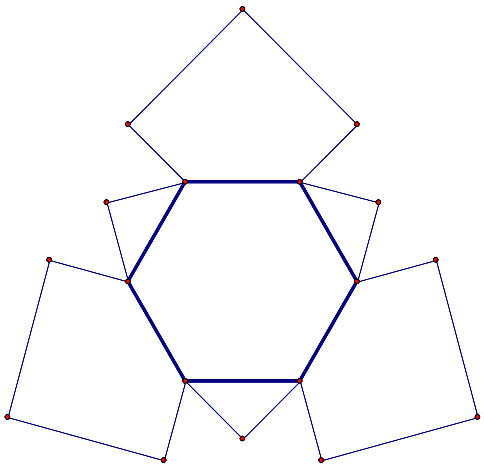
10. 設 $A(0,0,6)$，$B(0,0,20)$為空間中的兩個定點，$P(x,y,0)$為一個動點，若$0\le x\le 15$，$0\le y\le 15$，$\angle APB\ge 30°$，求 $P$ 點之軌跡所成之圖形的面積______________ 。

11. 如下圖一，將三個邊長為 12 的正方形紙片，分別取其中相鄰兩邊中點的連線切成一個等腰直角三角形和一個五邊形。如下圖二，將這 3 個等腰直角三角形、3 個五邊形和 1 個邊長為$6\sqrt{2}$ 的正六邊形，沿著粗線向上折成一角錐多面體，求此角錐多面體的體積是___________ 。
(紙片厚度忽略不計)

圖一



圖二



參考解答

填充題：每題 6 分，共 66 分。(各題答案須將最終數值算出，並化為最簡型式)

| **1.** | **2.** | **3.** | **4.** | **5.** | **6.** |
|---|---|---|---|---|---|
| 531 | $\sqrt{2}+\sqrt{6}i$ <br> $-\sqrt{2}-\sqrt{6}i$ | $\begin{bmatrix}0 & -8192\\ 8192 & 0\end{bmatrix}$ <br> (或$\begin{bmatrix}0 & -2^{13}\\ 2^{13} & 0\end{bmatrix}$) | $\frac{44}{15}$ (或 $2\frac{14}{15}$) | $2\sqrt{7}+2$ | 1234567890 |
| **7.** | **8.** | **9.** | **10.** | **11.** | |
| 9 | 7200 | $\frac{1}{2}\sqrt{xy+yz+zx}$ | $75\sqrt{3}+13\pi$ | 864 | |