教育部受託辦理109學年度
公立高級中等學校教師甄選

數學科　試題

數學科 試題

請注意：本試題共兩部分，選擇題12題及綜合題2大題，共計100分；**選擇題請用2B軟心鉛筆在答案卡劃記，綜合題限用藍色、黑色之原子筆或鋼筆在答案本上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆。**本科不可以使用電子計算器。

第一部分：選擇題（共 40 分）

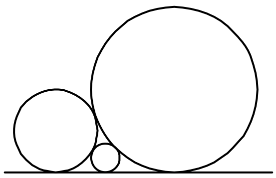
一、單選題（每題 3 分，共 24 分）

(B) 1. 等差數列$\langle a_n \rangle$前n項和S_n的最大值為S_7，且$|a_7|<|a_8|$，則使$S_n>0$的n最大值為
(A)12 (B)13 (C)14 (D)15。

(C) 2. 已知某種快篩試劑對某病毒的檢驗，其「偽陰率」為8%（即帶原者做檢驗有8%的機會呈陰性反應，其他呈陽性反應），而「偽陽率」為1%（即未帶原者做檢驗有1%的機會呈陽性反應，其他呈陰性反應）。某地區經快篩試劑篩檢後呈現陽性反應的民眾中有2%為此病毒的帶原者，則此地區病毒的帶原者占全部人口的比例約為何？
(A) 2% (B) 0.2% (C) 0.02% (D) 0.002%。

(C) 3. 設多項式函數$f(x)$的定義域包含區間$[a,b]$，且在$[a,b]$內$f(x)\ge 0$恆成立，n為任意自然數，將區間$[a,b]$平分成n等分，則$f(x)$在區間$[a,b]$上的黎曼和 $R_n=\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\cdot\dfrac{b-a}{n})$。設$y=f(x)$、$x$軸、直線$x=a$與$x=b$所圍成區域的面積為$A$，則下列敘述何者錯誤？ (A) R_n是n個矩形面積的和 (B) $A=\lim\limits_{n\to\infty} R_n$
(C)對任意正整數n而言，$A>R_n$ (D)若$f(x)$在區間$[a,b]$上為遞增，則$R_2<R_4$。

(A) 4. 如圖，三個兩兩外切的圓，也都與直線相切，最大圓半徑為100，中圓的半徑為25，求最小圓的半徑為何？ (A)$\dfrac{100}{9}$ (B)$\dfrac{10}{3}$ (C)$\dfrac{36}{5}$ (D)$\dfrac{18}{5}$。

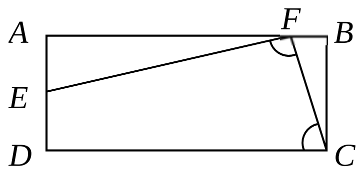


(D) 5. 已知k是實數，兩複數$z_1=1+2ki$，$z_2=k-i$，集合$A=\{z\,\big|\,|z-z_1|\le\sqrt{2}\}$，$B=\{z\,\big|\,|z-z_2|\le 2\sqrt{2}\}$，若$A\cap B$是空集合，則$k$值可能為何？ (A)$-2$ (B)-1 (C)1 (D)2。

(C) 6. 設$f(x)=3x+1$，$g(x)=3x^2+3$，若$h(f(x))=g(x+1)$，則$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x}=$ (A)$\dfrac{10}{3}$ (B)$\dfrac{8}{3}$ (C)$\dfrac{4}{3}$ (D)$\dfrac{2}{3}$。

(A) 7. 求$y=\dfrac{x}{a}(x-a)$與$x=\dfrac{y}{a}(y-a)$所圍區域的面積為 (A)$\dfrac{8}{3}a^2$ (B)$\dfrac{10}{3}a^2$ (C)$\dfrac{11}{3}a^2$ (D)$\dfrac{13}{3}a^2$。

(D) 8. 如圖，長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=1$，E 為 $\overline{AD}$ 的中點，F 為 $\overline{AB}$ 上一點。若 $\angle EFC=\angle DCF$，則 $\tan(\angle AFE)=$？ (A) $\dfrac{8-\sqrt{13}}{6}$ (B) $\dfrac{4-\sqrt{13}}{6}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{13}-3}{6}$ (D) $\dfrac{\sqrt{13}-2}{6}$。



二、複選題（每題 4 分，共 16 分，全對才給分）

(A C D) 9. 關於二階方陣 A=$\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，C=$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，D=$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$。請選出正確的選項。 (A) $A^{91}=A^{71}$ (B) $B^{91}=B^{71}$ (C) $C^{91}=C^{71}$ (D) $B^5D^3=D^3B^5$。

(B C) 10. 下列敘述哪些是正確的？ (A)以 8 種不同色之顏料，塗在正四面體（可任意移動，翻轉）之立體表面，共 420 種塗法 (B)方程式 $|x|+|y|+|z|=18$ 的整數解共 1298 組 (C)袋中共有 6 個白球、4 個紅球、3 個黑球，今任取 3 球，恰得兩種顏色球之機率為 $\dfrac{189}{286}$ (D)從一副 52 張的撲克牌中任意抽出三張，此三張中至少有兩張字母相同者（如 $KK5,777$）之機率為 $\dfrac{72}{425}$。

(B D) 11. 設 $(1+x-x^2)^{50}=1+ax+bx^2+\cdots+cx^{100}$，則下列選項何者正確？ (A) $a=-50$ (B) $b=1175$ (C) $b=-1225$ (D) $a+b+c=1226$。

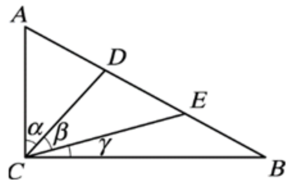
(A D) 12. 設擲某銅板出現正面的機率為 p，$0<p<1$。連續擲此銅板 4 次，若第 k 次出現正面則得 $\dfrac{1}{2^k}$，否則得 0，$k=1,2,3,4$。設總所得的期望值為 a，總所得超過 $\dfrac{1}{3}$ 的機率為 b，則 (A) a 為 p 的一次多項式 (B) $\dfrac{15}{16}<a<1$ (C) b 為 p 的二次多項式 (D) $p<b<p+p^2$。

第二部分：綜合題（共 60 分）

一、填充題（每題 4 分，共 36 分）

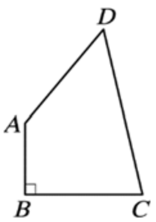
1.解 $(3^x-9)^3-(3-9^x)^3=(3^x+9^x-12)^3$ 得 x=<u>1, 2, $\frac{1}{2}$</u>。

2.如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$ 且 $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB}$，已知 $\angle ACD = \alpha, \angle DCE = \beta, \angle ECB = \gamma$，則 $\dfrac{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin\beta} = \underline{\dfrac{1}{3}}$。



3.方程式 $\big||x|-4\big| = mx+3$ 有2相異實根，求 m 的範圍 $\underline{-1<m<-\frac{3}{4} \text{或} \frac{3}{4}<m<1}$。

4.如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB} = \sqrt{5}$、$\overline{BC} = 2\sqrt{5}$、$\overline{CD} = 6$、$\overline{AD} = \sqrt{21}$，$\angle ABC = 90^\circ$，則 $\overline{BD} = \underline{2+2\sqrt{5}}$。

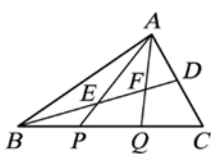


5.若 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n \cos\frac{n\pi}{3} = a$、$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n \sin\frac{n\pi}{3} = b$，求數對 $(a,b) = \underline{(0, \frac{1}{\sqrt{3}})}$。

6.方程式 $\sin x - 3\cos x = k$，在 $0 \le x \le \pi$ 的範圍內，有兩個相異的實數解，求實數 k 的範圍為 $\underline{3 \le k < \sqrt{10}}$。

7.袋中有12個白球、8個紅球，每次隨機抽取1球，取後不放回，直到所有球取完為止。求取球過程中至少有一次遇到取得之白球、紅球個數相等之機率為 $\underline{\dfrac{4}{5}}$。

8.如圖，於$\triangle ABC$ 中，P、Q 為 $\overline{BC}$ 的三等分點(即 $\overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$)，且 D 為 $\overline{AC}$ 的中點，若 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AP}$、$\overline{AQ}$ 分別相交於 E、F，則 $\overline{BE} : \overline{EF} : \overline{FD} = \underline{5:3:2}$。



9.設甲袋中有2白球，乙袋中有3紅球，今每次自各袋中隨機取一球作交換，趨於穩定時，甲袋中有1白球1紅球之機率為 $\underline{0.6}$。

二、計算題（每題 8 分，共 24 分）

1.設方程式 $x^3-2x^2-3x+1=0$ 之三根為 α、β、γ，試求以 $\dfrac{\alpha-1}{2\alpha+3}$、$\dfrac{\beta-1}{2\beta+3}$、$\dfrac{\gamma-1}{2\gamma+3}$ 為三根之三次方程式。

2.將偶數數列 $S=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$ 排列為以下陣列，第 i 列第 j 行為 a_{ij}，例如，$a_{32}=18$，試求一般項 a_{ij}。

	1	2	3	4	5	…	j	行
1	2	4	8	14				
2	6	10	16					
3	12	18						
4	20							
5								
⋮								
i							a_{ij}	
列								

3.如圖，有一個底半徑為 5 公分的圓柱體，被一個通過直徑 AB 且與底面夾 45° 角的平面所截，試求所截出的立體體積。(如圖陰影與斜線的體積)