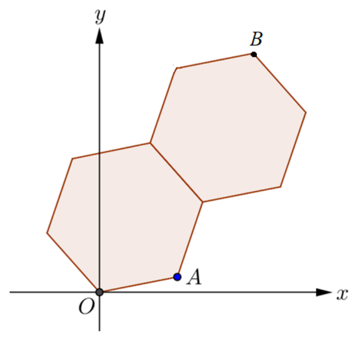
# 國立中央大學附屬中壢高級中學 109 學年度第 1 次教師甄選數學科筆試題目卷

一、填充題(每格 5 分)

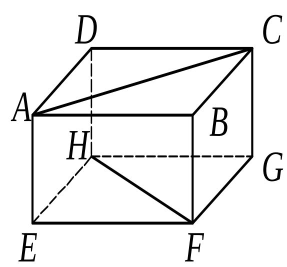
1. 設鈍角三角形 $ABC$ 的內切圓半徑為 $\sqrt{3}$. 已知內切圓圓心 $O$ 到頂點 $A$ 的距離為 2, 而 $O$ 到頂點 $B$ 的距離為 $2\sqrt{7}$,
   則三角形 $ABC$ 的面積為____________.

2. 一個正八邊形, 其頂點 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ 皆落在單位圓 $C$ 上, 點 $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 為圓 $C$ 上一點,
   試求:$\left|\sum_{k=1}^{8}\overrightarrow{PA_k}\right| =$______________.

3. 如圖, 有兩個正六邊形置於直角坐標平面上, 已知 $O(0, 0)$, $A(5, 1)$, 試求 $B$ 點坐標為_______________.



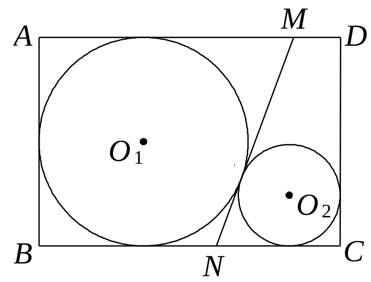

4. 如圖, 正立方體 $ABCD-EFGH$ 中, 已知 $\overleftrightarrow{AC}$ : $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+5}{1}$, $\overleftrightarrow{HF}$ : $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{a}$, 其中 $a \neq 0$,
   試求:正立方體的**體積**為______________.




5. 空間中一平面 $E$ 通過點 $P(3,1,2)$ 且分別交 $x, y, z$ 軸的正向於 $A, B, C$ 三點, 已知 $O$ 為原點,
   且令 $m = 3\overline{OA}+9\overline{OB}+2\overline{OC}$, 求: $m$ 的最小值為___________,

6. 將 5 個 $A$, 5 個 $B$ 和 5 個 $C$ 等 15 個字母排成一列，使得前 5 個字母中沒有 $A$, 中間 5 個字母中沒有 $B$，在最後 5 個字母中沒有 $C$, 試求：有__________種排列方式.

7. 如右圖，坐標平面上有一矩形 $ABCD$, 其中 $A(0,18), B(0,0), C(25,0)$，若矩形內有大小兩圓 $O_1$ 與 $O_2$ 互相外切，且圓 $O_1$ 切矩形於三個邊，圓 $O_2$ 切矩形於兩個邊，試求：兩圓的內公切線 $\overleftrightarrow{MN}$ 的斜率為何？__________.




8. 設三向量 $\overrightarrow{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\overrightarrow{b}=(1,\ 0,\ 3)$，$\overrightarrow{c}=(0,\ -1,\ 5)$, $O$ 為原點. 設

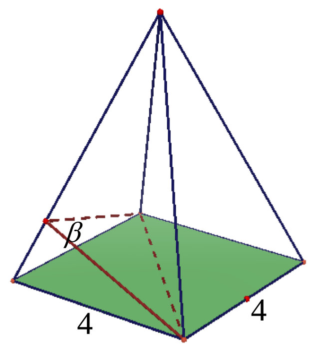
$$T=\{\,P\,|\,\overrightarrow{OP}=x\,\overrightarrow{a}+y\,\overrightarrow{b}+z\,\overrightarrow{c}\,,\ -1\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ -2\le z\le 3\,\}，$$

試求 $T$ 形成的區域的體積為__________.

9. 已知有一圓內接五邊形 $ABCDE$, 且 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=4,\ \overline{AE}=1$, 設 $\angle ABC=\alpha,\ \angle ACE=\beta$,
試求：$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)=$__________.

10. 設 $f(x)=x^3+2x^2-3x-1$, $g(x)=x^4+3x^3-x^2-5x+1$，且 $\alpha,\beta,\gamma$ 為 $f(x)=0$ 之 3 根.
試求：$\dfrac{1}{g(\alpha)}+\dfrac{1}{g(\beta)}+\dfrac{1}{g(\gamma)}$ 之值為__________.

11. 有一個四角錐，其四個側面均為等腰三角形，且底面邊長為 4 的正方形，設側面和底面的夾角為 $\alpha$，側面和側面的夾角為 $\beta$，已知 $\cos\beta = \dfrac{-1}{4}$，試求 $\cos\alpha =$______________.




12. 設 $x, y$ 為任意實數，則 $(x-2\cos y)^2+(3x^2+8-2\sin y)^2$ 的最小值為_____________.

13. 試求此定積分 $\int_{-2}^{2}\left|\sqrt{4-x^2}-(x+2)\right|dx =$_____________.

14. 坐標空間中，在六個平面 $3x+4y=0,\ 3x+4y=5,\ 4x-3y=0,\ 4x-3y=5,\ z=0$ 及 $z=2$ 所圍成的長方體上隨機選取三個相異頂點. 若每個頂點被選取的機率相同，則選到三個頂點所形成的三角形面積大於 1 之機率為___________.

15. 設三次函數 $f(x)=x^3-(2a+1)x^2+bx-c$，且 $a, b, c$ 均為整數，若 $f(x)=0$ 有虛根，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^3-1}=\dfrac{1}{3}$，

試求：$a+b+c=$______________.

16. 已知$a, b$皆為正實數，且滿足$a^b = b^a$與$a = 89b$，則$\log_{89}(ab) =$____________.

17. 求$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} =$____________.

18. 從$z^{2020} = 1$的所有複數根中，任選相異兩根$z_1, z_2$，則$|z_1 - z_2| < \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$的機率為____________.

19. 試求無窮級數的和：$\frac{3}{2!} - \frac{4}{3!} + \frac{5}{4!} - \frac{6}{5!} + - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+2}{(n+1)!} + \ldots\ldots =$____________.

20. 平面上，由圖形 $\frac{x^2}{4} + y^2 \le 1$，$y + 1 \ge (\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)x$，$y + 1 \ge -(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)x$ 所圍成區域之面積為____________.