

中正國防幹部預備學校  
109 年教師甄選測驗試題

## 數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：填充題共 25 題

作答方式：

1. 一律用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）
2. 未依規定劃記答案卡，致機器掃描無法辨識答案，其後果由考生自行負擔
3. 答案卡每人一張，不得要求增補
4. 作答後，試卷與答案卡須一併繳回

本試題為填充題，共 25 題，每題 4 分，共 100 分

說明：第 A 題至第 Y 題，將計算出來的答案劃記在答案卡上，每題全對得 4 分，其餘情況不給分。

A. 試問方程式  $\sum_{k=1}^{26} C_k^{26} x^k = 8191$  實部為負的複數根有 12 個。

B. 有一四面體  $O-ABC$ ，其底面  $ABC$  是邊長為 4 的正三角形，且知

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = a$ ；若直線  $\overline{OA}$  與直線  $\overline{BC}$  間的公垂線段長是  $\sqrt{3}$ ，

則  $a = \frac{3}{4}$  (以最簡分數表示)。

C. 考慮所有滿足  $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2020} = 2021 \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{2020}} = 2021 \end{cases}$  的 2020 個正數

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2020}$ ，則對於  $i = 1, 2, \dots, 2020$ ， $a_i + \frac{1}{a_i}$  最大值為  $\frac{\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}}{\underline{2021}}$ 。

D. 設  $a, b, c$  為正實數，試求  $\frac{2b-2c}{a+b+2c} + \frac{2a+4c}{a+2b+c} + \frac{b}{a+b+c}$

的最小值為  $\sqrt{\boxed{9}} - \boxed{10}$ 。

E. 設實數  $a, b, c, d$  滿足  $a^2 + b^2 = 4$  與  $(c-7)^2 + (d-24)^2 = 36$ ，若  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  的

最大值為  $M$ ， $(a-c)^2 + (b-d)^2$  的最小值為  $m$ ，則  $M + m = \underline{\boxed{11}\boxed{12}}$ 。

F. 設有一階梯共有 20 階，每次只能走 2 階或 3 階，第 8 階階梯壞掉不能踩

且必須踩上第 12 階的上樓方法數為  $\boxed{13}\boxed{14}$ 。

G. 球體  $S: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  被平面  $E: 3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 5$  割成兩部份，求較小

部份的體積為  $\frac{\boxed{15}}{\boxed{16}} \pi$ 。

H. 設  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ，且  $f(x) = x^5 - 7x^4 + 9x^3 + 9x^2 - 7x + 8$ ，若

$$f(A) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}，試求  $h = \underline{\underline{1718}}$ 。$$

I. 已知三次方程式  $x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = 0$  的三根分別為  $\alpha, \beta, \gamma$ ，

$$則  $\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 = \underline{\underline{192021}}$ 。$$

J. 已知函數  $y = \frac{ax^2 + bx + 6}{x^2 + 2}$  的最小值 2，最大值 6，求實數  $a = \underline{\underline{22}}$ 。

K. 凸 12 邊形的任意 3 條對角線不交於 12 邊形內一點，求這些對角線將凸 12 邊形分成 232425 個區域數。

L. 圓內接四邊形  $ABCD$ ， $\overline{AC}$  交  $\overline{BD}$  於  $M$ ， $\overline{CD} = 2$ ， $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{AB} = 5$ ，試問  $\overline{AM} : \overline{CM}$  的比值為  $\frac{26}{27}$ 。

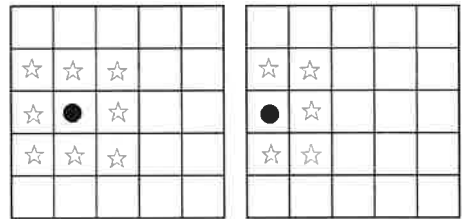
M. 設  $k$  為常數，若方程式

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = (x+5)^2 + (y+7)^2 = (x+11)^2 + (y+k)^2 \text{ 無解，}$$

求  $k = \underline{28}$ 29。

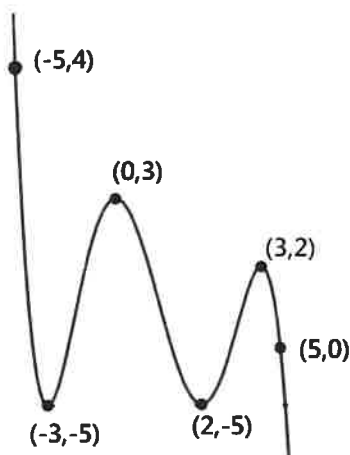
N. 若  $a = 1223334444555556666667777778888888999999999$ ，試求  $a^2 \div 11$  的餘數為 30。

O. 有一種遊戲叫做「九宮格」，就是被叫到的人，其座位周遭在九宮格內的人都要站起來，如圖座位標示「●」被叫到時，周遭標示「☆」的人都要站起來。今已知甲乙兩位學生在同一班，而該班學生共  $5 \times 5$  位，則當兩人任意坐時，甲被叫到而乙必須站起來的機率為  $\frac{n}{m}$ ， $m + n =$  3132。



P. 三角形的三邊長分別為  $\sqrt{29}$ 、 $\sqrt{37}$ 、 $\sqrt{52}$ ，求此三角形面積為 3334。

Q. 函數  $y = f(x)$  圖形如圖，則方程式  $f(f(x)) = -5$  的相異實根有 35 個。



R.  $\frac{1}{7} = \frac{a_1}{9} + \frac{a_2}{9^2} + \frac{a_3}{9^3} + \dots + \frac{a_n}{9^n} + \dots$  且  $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，則  $a_{300} =$  36。

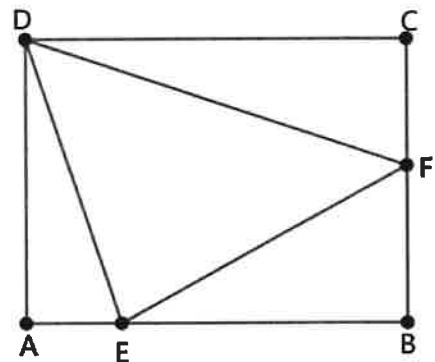
S. 凸四邊形  $ABCD$  中， $\overline{AB} = \sqrt{3}$ ， $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = 1$ ，設  $S$  和  $T$  分別為  $\triangle ABD$

和  $\triangle BCD$  的面積，則  $S^2 + T^2$  的最大值為  $\frac{37}{38}$ 。



T. 已知實數  $a, b, c$  滿足  $\begin{cases} a(4-b)=4 \\ b(4-c)=4 \\ c(4-a)=4 \end{cases}$ ，則  $a+b+c = \underline{39}$ 。

U. 長方形如右圖， $E, F$  分別在  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$  邊上，已知  $\triangle ADE$ 、 $\triangle BEF$ 、 $\triangle CDF$  的面積分別為 2、3、4，則  $\triangle DEF$  的面積為 40。



V. 設複數  $z_1 = -3 - \sqrt{3}i$ 、 $z_2 = \sqrt{3} + i$ 、 $z = \sqrt{3} \sin \theta + i(\sqrt{3} \cos \theta + 2)$ ，則  $|z - z_1| + |z - z_2|$  的最小值為 41 + 42\sqrt{43}。

W. 設  $a, b, c$  為  $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$  的三根，求

$$\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ac \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ac & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{44}} \text{。}$$

X. 若  $111111 + 4444444444 - 66666 = x^2$  且  $x > 0$ ，則  $x$  的各位數字和為

$$\underline{\underline{4546}} \text{。}$$

Y. 參考下表：「表燈」是指供給用電設備容量不足 100 瓩者 (住宅用電大都皆屬此類)。「非時間電價」指每月電費按用電度數採分段累進計費，不因日、夜間不同而有差異。用電戶每 2 個月抄表、收費一次，計費時各段度數加倍計算。若某表燈非營業用戶：7, 8 月 2 個月共用電 920 度，試問當期應繳電費為 47484950 元。

表燈非營業電價(107 年 4 月 1 日起實施)  
適用一般住家、機關、學校等非營業性質的機構  
非時間電價(累進電價)

單位：元

每月用電度數分段		夏月 (6 月 1 日至 9 月 30 日)	非夏月 (夏月以外時間)
非 營 業 用	120 度以下部分	1.63	1.63
	121~330 度部分	2.38	2.10
	331~500 度部分	3.52	2.89
	501~700 度部分	4.61	3.79
	701~1000 度部分	5.42	4.42
	1001 度以上部分	6.13	4.83

(上表摘自 <https://www.taipower.com.tw/upload/1417/2018033011504596497.pdf>)

註：1 度電 = 1,000 瓦特 · 小時 (1,000 Wh) = 1 千瓦特 · 小時 (1 kWh)。