國立科學工業園區實驗高級中學 109 學年度第一次教師甄選試題卷

填充題:每題 6 分,共 10 題

1. 已知987657 共有 12 個正因數，試求 987657 的最大質因數＝______________。

2. 「遞降數」是每位數字都比左邊數字小的正整數，如 75321。若將所有五位數中的遞降數由小到大排列，則第 109 個數是______________。

3. 已知方程式 $x^5-x^4-x^3-x^2-x-3=0$ 的五個根分別為 a、b、c、d、e，求 $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5$ 的值為______________。

4. 在 1781 年，日本藤田貞資於《精要算法》中提出所謂「蟲蝕算」這種填字遊戲。顧名思義，蟲蝕算遊戲就是將算式中打□被蟲損傷的地方，根據算術或代數推理手段恢復原來的數字使等式成立。下圖是一道稱為〈一個 8〉的蟲蝕算遊戲：

$$\begin{array}{cccc} & \square & \square & \square \\ \times & & 8 & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \square \end{array}$$

試問：這道遊戲的最後四個數字為______________。

5. 設 $f(x)$ 為二次多項式函數，且對所有的實數 x 恆有 $f(x-2)=f(-x-2)$。已知 $f(x)$ 的圖形在 y 軸上的截距為 1，在 x 軸上截得的線段長為 $2\sqrt{2}$ ，求 $f(x)$ =______________。

6. 設 $p=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2019^2}+\frac{1}{2020^2}}$ ，則與 p 最接近之正整數為______________。

7. 已知函數 $y=\log_2(kx^2)+x$ 的圖形與函數 $y=2^{|x|}+x$ 的圖形交於 A、B 兩點。若 $\overline{AB}=8\sqrt{2}$ ，則 k 之值為______________。

8. 設 $x\geq 0$，當 $f(x)=\frac{7}{3}\sqrt{9+x^2}-\frac{2}{3}x$ 有最小值時，此時 x 的值為______________。

9. 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 都為實係數二次多項式且最高項係數皆為 1，已知 $(f(x))^2$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $4x+1$，而 $(g(x))^2$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $5x+3$，求 $g(x)=$ ____________。

10. 已知空間中有一個四面體的四個頂點分別為 $A(0, 0, 1)$, $B(2, 4, 0)$, $C(0, 0, 0)$, $D(4, 2, 0)$，平面 E 通過 A 點與 $\overline{BD}$ 中點且與 $\overline{BC}$ 有交點。若平面 E 將此四面體分成兩塊，其中一塊的體積為原四面體的 $\frac{1}{3}$，求 E 的方程式為____________。

國立科學工業園區實驗高級中學 109 學年度第一次教師甄選試題卷

計算證明題：每題 8 分，共 5 題 （記憶版）

1. 若有整數 m, n 使得 $(\sqrt{3}+i)^m=(1+i)^n$ 。
   (1) 試證明 $n=2m$ 。
   (2) 找出滿足此方程式的所有解 (m, n) 。

2. 平面上 P 點滿足到正三角形三頂點的距離為 $3, 5, 7$ ，求正三角形的面積。

3. 已知 $f(x)=x^3-x^2-2x$ ， $g(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$ ，求 $g(x)$ 的極值。

4. 動直線 L 與 x 軸垂直，且與橢圓 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 交於 A, B 兩點，若 P 點在直線 L 上且 $|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|=1$ ，求 P 點的軌跡方程式。

5. 設 p，q 為實數使得 $x^3+3x^2+px-q=0$ 的三根成等差數列，
   且同時使得 $x^3+(2-p)x^2-(3+q)x-8=0$ 的三根成等比數列，求數對 (p, q) 。