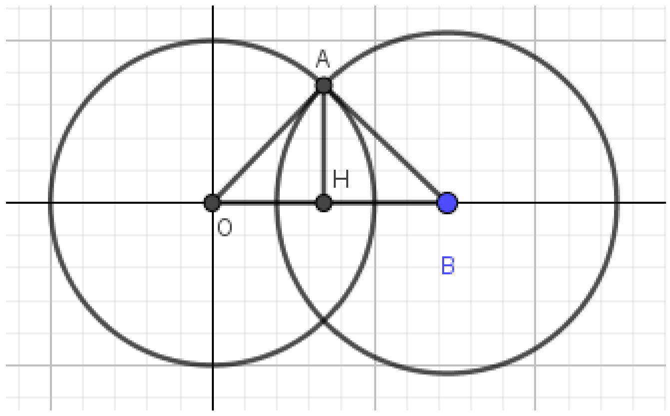
台中市立台中第一高級中等學校 109 學年度第 1 次教師甄選　數學科　解答

一、選填題甲(每題 6 分，共 60 分)

1. 已知 z 為複數且滿足 $|z|=1$ 、$|z-1.45|=1.05$，求 z 的實部為__________。　【$\frac{20}{29}$】

詳解:如圖，$\overline{OA}=1$ 、$\overline{AB}=1.05$ 、$\overline{OB}=1.45$



所以 z 的實部 $=\overline{OH}$

$=\overline{OA}\cdot\cos\angle AOB=1\cdot\frac{1^2+1.45^2-1.05^2}{2\cdot1\cdot1.45}=\frac{20}{29}$

2. 設 $P(x)=x^5-x^2+1=0$ 的五個根為 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ ，$Q(x)=x^2+1$，則 $Q(\alpha_1)\cdot Q(\alpha_2)\cdot Q(\alpha_3)\cdot Q(\alpha_4)\cdot Q(\alpha_5)=$ ____________。

解：由題意知 $P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)$

則 $Q(\alpha_1)\cdot Q(\alpha_2)\cdot Q(\alpha_3)\cdot Q(\alpha_4)\cdot Q(\alpha_5)$
$=(\alpha_1+i)(\alpha_1-i)(\alpha_2+i)(\alpha_2-i)(\alpha_3+i)(\alpha_3-i)(\alpha_4+i)(\alpha_4-i)(\alpha_5+i)(\alpha_5-i)$

$=P(i)P(-i)=(i^5-i^2+1)((-i)^5-(-i)+1)=5$

3. 設 $x\in R$ 且滿足方程式 $\frac{8^x+27^x}{12^x+18^x}=\frac{7}{6}$ ，則 $x=$____________。

解：令 $u=(\frac{3}{2})^x$ ，可化簡 $\frac{u^3+1}{u+u^2}=\frac{7}{6}$ ，解得 $u=-1,\frac{2}{3},\frac{3}{2}$ ，可得 $x=-1,1$

4. 設三次實係數多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足 $2f(2)=3f(3)=4f(4)$ ，且 $f(4)=1010$ ，求 $f(1)+f(5)=$____________。

詳解:令 $m=4f(4)=4040$ ，可知 $2,3,4$ 為方程式 $xf(x)-m=0$ 的三根
所以可以設 $xf(x)-m=a(x-2)(x-3)(x-4)(x-k)$

兩邊比較常數項可得 $-m=24ak\Rightarrow -k=\frac{m}{24a}$

$\Rightarrow xf(x)-m=a(x-2)(x-3)(x-4)(x+\frac{m}{24a})$

$\Rightarrow f(x)=\frac{a(x-2)(x-3)(x-4)(x+\frac{m}{24a})+m}{x}$

$\Rightarrow f(1)=(-6a)(1+\frac{m}{24a})+m=-6a+\frac{3m}{4}$ 、 $f(5)=\frac{(6a)(5+\frac{m}{24a})+m}{5}=6a+\frac{m}{4}$

$\Rightarrow f(1)+f(5)=m=4040$

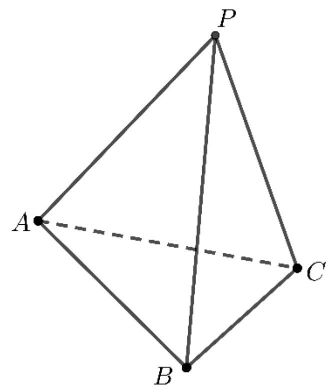
5. 當桌球比賽比分為 10:10 時，稱為 deuce，此後必須由兩人輪流各發一球，直到其中一名球員比對手多勝 2 分時比賽結束。依過去經驗知道，甲乙兩人比賽桌球，當甲發球時，甲得分機率為 $\frac{3}{5}$；當乙發球時，乙得分機率為 $\frac{3}{5}$。今甲乙兩人比賽，目前比分恰為 10:10，接著輪到甲發球，假設各次得分為獨立事件，則從 deuce 發生後開始計算發球次數，到比賽結束時，兩人發球總次數的期望值為____________次。

解：設比賽結束前發球次數的期望值為 E，再比賽第一分甲勝，第二分乙勝或第一分乙勝，第二分甲勝的機率為 $\frac{13}{25}$，此時比賽還需進行的發球次數的期望值為 E，總場數的期望值 $E+2$

再比賽第一二分甲全勝，或乙全勝機率為 $\frac{12}{25}$ 則比賽恰進行兩場

故 $E=\frac{12}{25}\times 2+\frac{13}{25}\times(E+2)$，可求得 $E=\frac{25}{6}$

6. 已知一四面體 $PABC$ 中，$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=60^\circ$，且 ΔAPB、ΔBPC、ΔCPA 的面積分別為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$、2、1，則這個四面體 $PABC$ 的體積為_____________。



解：令 $\overline{PA},\overline{PB},\overline{PC}$ 分別為 a,b,c，列式 $\begin{cases}\frac{1}{2}ab\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}bc\sin 60^\circ=2\\ \frac{1}{2}ca\sin 60^\circ=1\end{cases}$ 可解得 $a=1,b=2,c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

在 $\overline{PB},\overline{PC}$ 上取 $\overline{PB'}=1,\overline{PC'}=1$，則 $PAB'C'$ 為正四面體，其高為 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

四面體 $PABC$ 體積為 $\frac{1}{3}\times\Delta PBC\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$

7. 第一次段考某班全部學生的國文測驗成績平均為 54 分，標準差為 6 分；國文寫作成績平均為 16 分，標準差為 4 分，兩分數相加後所得總成績的標準差為 $2\sqrt{23}$，若國文寫作成績為 y，國文寫測驗分數為 x，則 y 對 x 的迴歸直線方程式_________________。

解：相加後標準差 $\sigma=\sqrt{92}=\sqrt{\sigma_x^2+2r\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2}=\sqrt{36+2r\times 6\times 4+16},r=\frac{5}{6}$

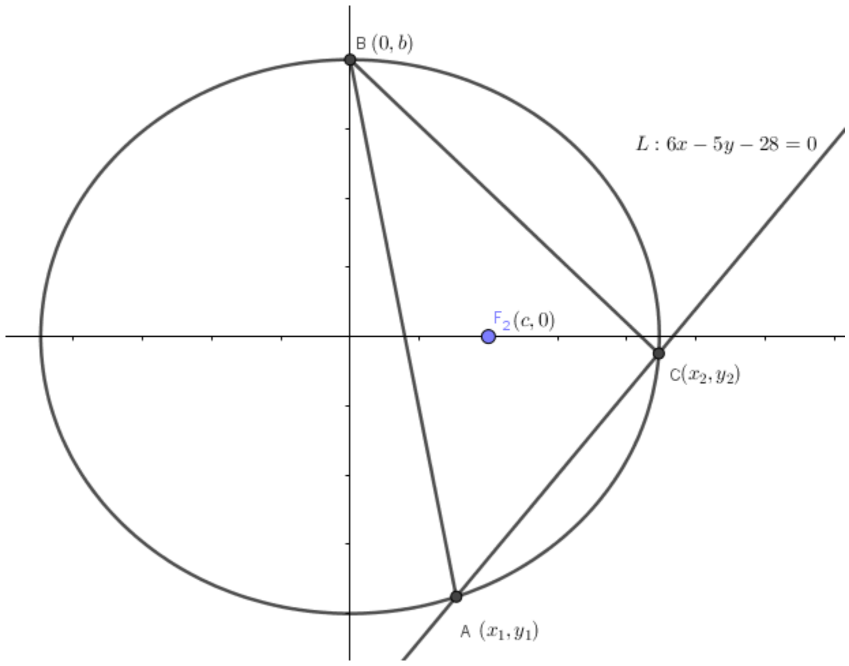
迴歸直線為 $y-16=\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times(x-54)$，$\cancel{y=\frac{10}{9}x-44}$

8. 將兩個 a 和兩個 b 共四個字母填入如下圖所示的 16 個小方格內，每個小方格內至多填一個字母，若相同的字母必須不同行也不同列，則共有____________種不同的填法。

解：填 a 方法 $\frac{C_1^{16}C_1^9}{2}=72$，填 b 方法 $\frac{C_1^{16}C_1^9}{2}=72$，共有 72^2 種

不合：2 個 a 所在方格內都填 b 的情況有 72 種；2 個 a 所在方格內都僅有一個填 b 的情況有 $C_1^{16}\times P_2^9$ 種；符合題意有 $72^2-72-C_1^{16}\times P_2^9=3960$。

9. 已知直線 $L: 6x-5y-28=0$ 交橢圓 $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$, 且 a,b 皆為正整數) 於兩點 A、C，且 $B(0,b)$ 為橢圓 Γ 的頂點。若 ΔABC 的重心 G 恰為橢圓的右焦點 $F_2(c,0)$，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，則橢圓 Γ 的正焦弦長為____________。



詳解:設 $A(x_1,y_1)$、$C(x_2,y_2)$，因為

ΔABC 的重心 G 恰為橢圓的右焦點 $F_2(c,0)$

所以 $x_1+x_2=3c$、$y_1+y_2=-b$

又 $m_{AC}=m_L=\dfrac{6}{5} \Rightarrow \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{6}{5}$

又 A,C 皆在橢圓上，可知

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$$

兩式相減可得 $\dfrac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0$

$$\Rightarrow \frac{-b^2}{a^2}=\frac{(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}=\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-b}{3c}\cdot\frac{6}{5}$$

$\Rightarrow 2a^2=5bc$ "

又 A,C 皆在直線 $L: 6x-5y-28=0$ 上

所以 $6x_1-5y_1-28=0$

$6x_2-5y_2-28=0$

兩式相加即得 $6(x_1+x_2)-5(y_1+y_2)-56=0$

$\Rightarrow 6(3c)-5(-b)-56=0 \Rightarrow 18c+5b=56$ #

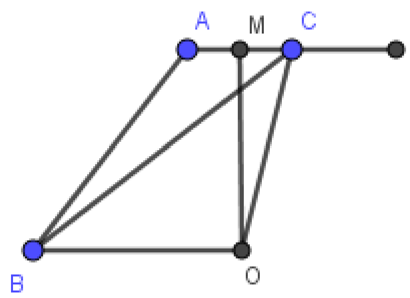
由 " # 及 a,b 為正整數 $\Rightarrow c=2, b=4, a^2=20$

$\Rightarrow$ 橢圓 Γ 的正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{32}{2\sqrt{5}}=\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$

10. 設 O 為 ΔABC 的外心，若 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$，則 $\sin\angle BAC=$____________。

詳解:不失一般性，設 ΔABC 的外接圓半徑 $R=2$

又 $2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BO}$ "



$\Rightarrow \overline{AC}=\dfrac{\overline{OB}}{2}=\dfrac{2}{2}=1$

取 $\overline{AC}$ 的中點 M，則 $\overline{OM}\perp\overline{AC}$，由 " 得知 $\overline{OM}\perp\overline{OB}$

且 B 與 A 位於直線 $\overleftrightarrow{OM}$ 的同側。

$$\cos\angle BOC=\cos(90^\circ+\angle MOC)=-\sin\angle MOC=-\frac{\overline{MC}}{\overline{OC}}=\frac{-1}{4}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{OB}^2+\overline{OC}^2-2\overline{OB}\cdot\overline{OC}\cdot\cos\angle BOC}=\sqrt{4+4+8\cdot\frac{1}{4}}=\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \sin\angle BAC=\frac{\overline{BC}}{2R}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

選填題乙(每題 5 分)

11. 在空間中，有三個不共平面的非零向量 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 、 $\overrightarrow{c}$ ，滿足 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot((\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}))=7$ ，求以三向量 $(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$ 、 $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c})$ 、 $(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$所張成的平行六面體體積為____________。

詳解:因為 $\overrightarrow{p}\times(\overrightarrow{q}\times\overrightarrow{r})=(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r})\overrightarrow{q}-(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{q})\overrightarrow{r}$

$$\Rightarrow(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot((\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\times(\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}))=(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot(((\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{a})\overrightarrow{c}-((\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{c})\overrightarrow{a})$$

$$=(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot(((\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{a})\overrightarrow{c}-0\overrightarrow{a})$$

$$=((\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{a})((\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{c}))$$

$$=(\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}))(\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}))$$

$$=(\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}))^2$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})=\pm\sqrt{7}$$

$(3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$ 、 $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c})$ 、 $(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$所張成的平行六面體體積

$$=\left\|\begin{matrix}3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{c}\\ \overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}3&1&1\\1&-1&2\\0&1&1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}\overrightarrow{a}\\ \overrightarrow{b}\\ \overrightarrow{c}\end{matrix}\right\|=9\sqrt{7}$$

12. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&3&0\\0&-4&5\end{bmatrix}$ 、 $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ ，且 $B=(I+A)^{-1}(I-A)$ ，求矩陣 $(I+B)^{-1}=$____________。

詳解: $B=(I+A)^{-1}(I-A)$

$$\Rightarrow(I+A)B=I-A$$
$$\Rightarrow B+AB=I-A$$
$$\Rightarrow AB+A+B+I=2I$$
$$\Rightarrow(I+A)(I+B)=2I$$

$$\Rightarrow(I+B)^{-1}=\frac{1}{2}(I+A)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\0&-2&3\end{bmatrix}$$

13. 已知數列$\langle a_n\rangle$滿足$\begin{cases} a_0=1 \\ a_{2k+1}=a_k & ,k\in N\cup\{0\} \\ a_{2k+2}=a_k+a_{k+1} & ,k\in N\cup\{0\} \end{cases}$，求$\sum_{k=0}^{63}a_k=$____________。

詳解: $\because a_{2k+1}=a_k \Rightarrow 1=a_0=a_1=a_3=a_7=a_{15}=...=a_{2^n-1}\quad (n\in N)$

令$b_n=a_0+a_1+a_2+a_3+...+a_{2^n-1}$

$=(a_0+a_2+a_4+...+a_{2^n-2})+(a_1+a_3+a_5+...+a_{2^n-1})$

$=(a_0+(a_0+a_1)+(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+...+(a_{2^{n-1}-2}+a_{2^{n-1}-1}))+(a_0+a_1+a_2+...+a_{2^{n-1}-1})$

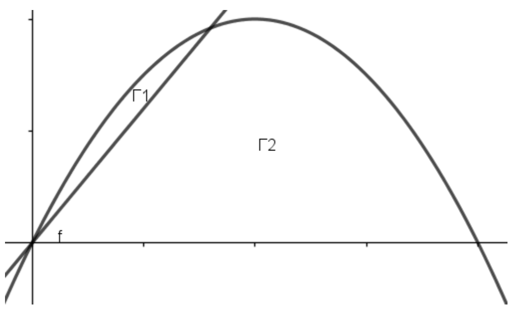
$=3a_0+3a_1+3a_2+...+3a_{2^{n-1}-2}+3a_{2^{n-1}-1}-a_{2^{n-1}-1}$

$=3b_{n-1}-1\Rightarrow b_n=\dfrac{3^n+1}{2}$

$b_1=a_0+a_1=1+1=2\Rightarrow b_2=3b_1-1=5\Rightarrow b_3=3b_2-1=14\Rightarrow b_4=3b_3-1=41\Rightarrow b_5=3b_4-1=122$

$\sum_{k=0}^{63}a_k=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_{62}+a_{63}=b_6=365$

14. 設Γ是由$y=2x-x^2$與x軸所圍成的平面圖形，直線$y=kx$將Γ分成兩部分(如下圖所示)，若Γ_1與Γ_2的面積分別為S_1與S_2，且$S_1:S_2=1:7$，求Γ_1繞y軸旋轉一圈的旋轉體體積為____________。



解： $y=2x-x^2$和$y=kx$的交點為$O(0,0)$， $A(2-k,k(2-k))\ (0<k<2)$ ，於是

$S_1=\int_0^{2-k}(2x-x^2-kx)dx=\dfrac{1}{6}(2-k)^3$ ，$S_1+S_2=\int_0^2(2x-x^2)dx=\dfrac{4}{3}$ ，$S_2=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{6}(2-k)^3$

因為$S_1:S_2=1:7$，所以$\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{6}(2-k)^3=7\times\left[\dfrac{1}{6}(2-k)^3\right]$

解得$k=1$，於是$A(1,1)$

S_1繞y軸旋轉一圈的旋轉體體積為

$$V=\frac{1}{3}\left(\pi\cdot1^2\right)\cdot1-\pi\int_0^1x^2dy=\frac{\pi}{3}-\pi\int_0^1(1-\sqrt{1-y})^2dy$$

$$=\frac{\pi}{3}-\pi\int_0^1\left[1-2\sqrt{1-y}+1-y\right]dy=\frac{\pi}{3}-\pi\left[2y+\frac{4}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}y^2\right]\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$$

15. 設 ΔABC 的三邊長分別為 a, b, c，且 $a+b+c=12$，求 $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{4b}{c+a-b}+\dfrac{9c}{a+b-c}$ 的最小值為＿＿＿＿＿＿。

解：令 $a=x+y$，$b=y+z$，$c=z+x$

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{4b}{c+a-b}+\frac{9c}{a+b-c}=\frac{x+y}{2z}+\frac{4(y+z)}{2x}+\frac{9(z+x)}{2y}=\frac{x}{2z}+\frac{2z}{x}+\frac{y}{2z}+\frac{9z}{2y}+\frac{2y}{x}+\frac{9x}{2y}$$

$\geq 2+3+6=11\,(AM\geq GM)$

最小值 11

16. 已知 ΔABC 中，$\angle BAC=90^\circ$，$\overline{AB}=1$，$\overline{AC}=\sqrt{3}$，若 P 點在 ΔABC 內部且滿足 $\dfrac{\overrightarrow{PA}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{PB}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{PC}}{\left|\overrightarrow{PC}\right|}=\overrightarrow{0}$，

求序對 $(\overline{PA},\overline{PB},\overline{PC})=$＿＿＿＿＿＿。

解：由內積可知 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$，即 P 點為三角形內費馬點

令 $\overline{PA}=x,\overline{PB}=y,\overline{PC}=z$ 利用餘弦定理

$x^2+y^2+xy=1\ldots(1)$

可知 $y^2+z^2+yz=4\ldots(2)$，又由三角形面積可得 $xy+yz+zx=2$，代回可知 $x^2+y^2+z^2=3$

$z^2+x^2+zx=3\ldots(3)$

(1)+(2)可得 $y(x+y+z)=2$ 同樣 $z(x+y+z)=4, x(x+y+z)=1$，可得 $x:y:z=1:2:4$

代入求得 $x=\dfrac{\sqrt{7}}{7}, y=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}, z=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$

17. 某電子玩具按下按鈕後，只會出現紅球或白球。若某次出現為紅球，則下次按下按鈕後出現紅球、白球的機率分別為 $\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{2}{3}$；若某次出現為白球，則下次按下按鈕後出現紅球、白球的機率分別為 $\dfrac{3}{5}$、$\dfrac{2}{5}$。已知第一次按下按鈕後出現紅球和白球的機率相等，求第 n 次按下按鈕後出現紅球的機率為＿＿＿＿＿＿。

解：利用轉移矩陣或者是數列遞迴式設第 n 次按下按鈕出現紅球的機率為 P_n，根據題意可知 $P_1=\dfrac{1}{2}$，當 $n\geq 2$ 時，

$P_n=\dfrac{1}{3}P_{n-1}+\dfrac{3}{5}(1-P_{n-1})$，即 $P_n=-\dfrac{4}{15}P_{n-1}+\dfrac{3}{5}$，構造 $P_n-\dfrac{9}{19}=-\dfrac{4}{15}(P_{n-1}-\dfrac{9}{19})$

可知 $P_n=\dfrac{1}{38}(-\dfrac{4}{15})^{n-1}+\dfrac{9}{19}$

18. 設 $\alpha,\beta\in[0,2\pi]$ 且 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$，求 $\cos\alpha$ 的最大值為＿＿＿＿＿＿。

詳解:由題意得知 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha+\cos\beta$

$\Rightarrow(\cos\alpha-1)\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha=0$

設點 $P(\cos\beta,\sin\beta)$，直線 $L:(\cos\alpha-1)x-(\sin\alpha)y-\cos\alpha=0$

所以 P 在 $\Gamma:x^2+y^2=1$ 上，也在直線 L 上

因此圓心 $O(0,0)$ 到直線 L 的距離小於或等於半徑

即$\left|\dfrac{-\cos\alpha}{\sqrt{(\cos\alpha-1)^2+(-\sin\alpha)^2}}\right|\le 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha \le 2-2\cos\alpha$

$\Leftrightarrow (\cos\alpha-1)^2 \le 3$

所以$-1\le\cos\alpha\le\sqrt{3}-1$