

臺中市立文華高級中等學校 109 學年度第 1 次教師甄選 數學科專業知能試題本

測驗說明：

- 一、本測驗分成二大題：填充題(80分)及計算題(20分)。
- 二、填充題作答說明：請將正確答案填入正確的題格中，分式須化至最簡，根式須有理化，否則不予計分，全對才給分，不需計算過程。
- 三、計算題作答說明：請自行標清楚題號再作答，須詳列計算過程或說明理由。
- 四、另附五張 A4 計算紙，可供計算或打草稿，請勿用答案卷正反面打草稿。
計算紙上方請書寫准考證號碼，並於考試完畢隨試題收回。

一、填充題：(共 80 分)

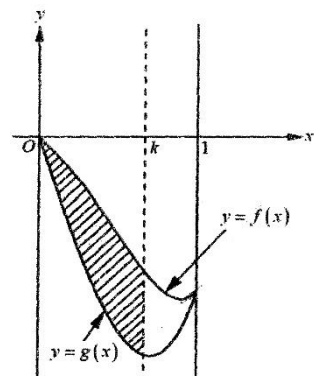
I. 填充一(每格 4 分，共 32 分，全對才給分。)

1. 設雙曲線 Γ_2 與橢圓 $\Gamma_1: \frac{x^2}{33} + \frac{y^2}{49} = 1$ 有相同焦點 F_1, F_2 ，若 P 為 Γ_1 與 Γ_2 的一交點，且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ ，則雙曲線 Γ_2 的共軛軸長為_____。
2. 在複數平面上， O 為原點，點 $A(z_1)$ ， $B(z_2)$ ，已知 $|z_1 - 3 + 4i| = 1$ 且 $\frac{z_2}{z_1} = 1 + \sqrt{3}i$ ，則 $\triangle OAB$ 面積之最大值為_____。
3. 某汽車銷售公司對業務員的銷售獎金分配規定如下：業務員在一季(三個月)裡恰有一個月達成目標，可得獎金 2 萬元；如果有兩個月達成目標，可得獎金 5 萬元；如果三個月都達成目標，可得獎金 10 萬元；如果三個月都未達成目標，則沒有獎金；假設每位業務員每月達成目標的機率 0.2，每個月是否達成目標是互相獨立的事件，且業務員之間彼此互不影響。試求已知該公司有 n 名員工，且在一季裡，該公司至少有一人可以拿到獎金的機率超過 0.999，則 n 至少為_____。(已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$)
4. 已知三次函數圖形的對稱中心為 $(-2, 5)$ ，且函數在 $x=1$ 附近的局部圖形近似直線 $y=7x+1$ ，則此三次函數圖形為_____。
5. 已知 x, y, z 滿足 $x+y+z=1$ ， $x^2+y^2+z^2=3$ ， $x^3+y^3+z^3=5$ ，則 $x^4+y^4+z^4=_____$ 。
6. 三次實係數方程式 $x^3 + (1-a)x^2 + (a+5)x + 2a + 5 = 0$ 有兩正根，此方程式任兩根之和由小到大排列恰成等差數列，則 a 之值為_____。
7. 設 $f(x) \in R[x]$ ， $f(x+2)[1-f(x)] = 1+f(x)$ ，且 $f(1) = 1 - \sqrt{2}$ ，則 $f(1021) + f(2025) = _____$ 。

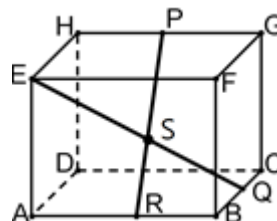
8. 在坐標平面上，從點 $A(0,0)$ 走捷徑到點 $B(6,5)$ ，共轉三次彎的情形下，走法共有_____種。

II. 填充二(每格 6 分，共 48 分，全對才給分)

9. 設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 皆為實係數多項式，當 $0 \leq x \leq 1$ ，恆有 $f(x) \geq g(x)$ ，設 $0 \leq k \leq 1$ ，右圖斜線區域 R_k 為 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 圖形與直線 $x = 0$ 、 $x = k$ 所圍成的封閉圖形。已知 R_k 的面積為 $\frac{2}{5}k^5 - k^4 + k^2$ ，將 R_k 繞 x 軸旋轉所得旋轉體體積為 $(-\frac{4}{9}k^9 + k^8 + \frac{2}{3}k^6 - \frac{16}{5}k^5 + \frac{8}{3}k^3)\pi$ ，則多項式 $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



10. 右圖中 $ABCD-EFGH$ 是一個長方體，已知 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{AE} = 2$ 。
 P 為 \overline{GH} 的中點， Q 在 \overline{BC} 上，且 $\overline{BQ} : \overline{QC} = 2 : 1$ ， R 為 \overline{AB} 上一點，
 若 \overline{EQ} 與 \overline{PR} 相交於一點 S ，設 $\angle PSE = \theta$ ，則 $\cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



11. 一拋物線 $y^2 = 4x$ 與一直線交於 A 、 B 兩點，已知拋物線與直線所圍出來的面積為 $\frac{9}{8}$ ，則 A 、 B 的中點軌跡方程式為_____。

12. 設 $f(x) = x^3 - kx^2 + 4k$ ，若 $f(x) = 0$ 恰有兩相異負根與一正根，則實數 k 的範圍為_____。

13. 從 1~15 中選出三個數字為 x, y, z ，滿足 $x \leq y \leq z$ ，則 $y - x > 2$ 且 $z - y > 3$ 的機率為_____。

14. 從 n 個不同物中任取 r 個排成一列，若含兩個特定物之排列數與不含此兩個特定物之排

列數相等，且矩陣 $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} r \\ n \\ r \\ n \end{bmatrix}$ ，則 $A^{30}B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 座標平面上，滿足聯立不等式 $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \\ x-y \leq 0 \\ x-y \geq -2 \end{cases}$ 的可行解區域為 S ，則區域 S 繞 x 軸旋轉一

圈所得立體之體積為_____。

16. 空間中， $O(0,0,0)$ 、 $A(3,1,-2)$ 、 $B(-1,1,4)$ 、 $C(2,3,1)$ ，若 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$ ， $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ，且 $3 \leq x+y+z \leq 6$ ，則所有 P 點所成的圖形區域體積為_____。

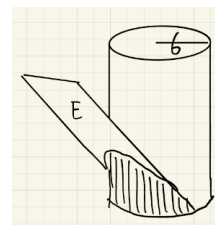
臺中市立文華高級中等學校 109 學年度第 1 次教師甄選
數學科專業知能試題本

二、計算題：(共 20 分)

(記憶版)

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ ，不等式 $x^2 \log_a \frac{a^2(a+1)}{3} + 2x \log_a \frac{3a}{a+1} + \log_a \frac{(a+1)^2}{9a^2} > 0$ 恆成立，求 a 的範圍？(6分)

2. 如右圖，一直圓柱體底面為半徑 6 公尺的圓，平面 E 通過直圓柱底面圓的直徑，且平面 E 與直圓柱的底面夾角為 30° ，平面 E 將此直圓柱體切割成兩塊，求較小塊的體積為多少立方公尺？(7分)



3. 已知連續隨機變數 X 的機率密度函數 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1 \end{cases}$ 且 X 的期望值

$E(X) = \frac{7}{12}$ ，則 X 的變異數 $V(X)$ 為何？(7分)