

## 臺北市立南港高工 100 學年度教師甄選筆試 解答

甄選科別：數學科 科目：高中數學

## 一、填充題

$$1、\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) + 7 = \underline{\frac{21-5\sqrt{13}}{2}}$$

$$2、\text{設 } \cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{3}, \sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2}, \text{ 則 } \sin(\alpha + \beta) = \underline{\frac{12}{13}}$$

3、設  $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx - n = 0$ ， $g(x) = x^3 + (2-m)x^2 - (n+3)x - 8 = 0$ ，其中  $m, n$  皆為整數且  $f(x) = 0$  之三根成等差數列，而  $g(x) = 0$  之三根成等比數列，

$$\text{則 } m^2 + n^2 = \underline{10}。$$

4、設圓  $C$  通過圓  $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 1$  與直線  $x + y = -1$  的交點，且圓心在  $2x - y + 6 = 0$  上，則圓  $C$  的半徑 =  $\underline{2\sqrt{2}}$ 。

5、設  $(\log x) + x - 4 = 0$  之實根為  $\alpha$ ， $10^x + x - 4 = 0$  之實根為  $\beta$ ，則  $\alpha + \beta = \underline{4}$

6、若實係數方程式  $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 3ax + a = 0$  恰有 2 實根，且此 2 實根之和為 3，則  $a = \underline{5}$

7、設  $x, y \in \mathbb{R}$ ，且  $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32$ ，若  $x^2 + y^2$  的最大值為  $M$ ，最小值為  $m$ ，則  $M+m = \underline{20}$

8、若  $z \in \mathbb{C}$ ， $|z|=1$ ，則  $|z^2 - z + 2|$  的最小值為  $\underline{\frac{\sqrt{14}}{4}}$

9、想將一半徑 3 公分的球投進一個三角形的球框，因球太大被卡在框架上，若此三角形球框三邊長為 3, 4, 6 公分，則球心到此三角形所決定的平面的最短

$$\text{距離為 } \underline{\sqrt{\frac{433}{52}}} \text{ 公分。}$$

10、若  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + k$ ， $k \in \mathbb{R}$ ，且  $f(x) = 0$  有相異 2 負根及 1 正根，則  $k$  的範圍為  $\underline{-5 < k < 0}$

11、 $x \in \mathbb{R}$ ， $\sqrt{10-x^2} > x+2$ ，求  $x$  的範圍  $\underline{-\sqrt{10} \leq x < 1}$ 。

12、求所有函數  $f(x)$ ，對任意實數  $x$ ， $|x| \neq 1$ ，滿足  $f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$ ，

$$\text{則 } f(x) = \underline{\frac{x^3 + 7x}{2 - 2x^2}}$$

13、將「南港愛我，我愛南港」8 個字全取排成一列，其中「南」與「港」兩字不相鄰之排法有  $\underline{660}$  種。

14、設數列  $\langle a_n \rangle$  之  $a_1 = 0, a_2 = 1, \dots, a_{n+2} = \frac{2a_{n+1} + a_n}{3} (n = 1, 2, \dots)$

$$\text{, 求 } a_n = \frac{3}{4} + (-\frac{3}{4})(-\frac{1}{3})^{n-1}$$

15、設  $A(-2, 1, 3), B(0, 3, -3)$ ， $P$  為直線  $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$  上一點，求  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$  有最小值時，此時  $P$  點的坐標為  $P(-1, 1, 1)$ 。

16、已知甲袋中有 2 個 10 元硬幣，乙袋中有 3 個 5 元硬幣，今同時從甲，乙袋中各任取 1 個硬幣互換，經長期互換多次後呈現穩定狀態，則乙袋中金額的期望值為 21 元。

## 二、問答題

(1) 5 個  $(-4, 6, 0, -100, 50)$

(2)

1. 說明偶數的定義，偶數的定義整數中 2 的倍數。
2. 說明倍數的定義(2 的倍數即可以寫成  $2k$ ,  $k$  為整數的數)
3. 說明整數的定義( $\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ )
4.  $0 = 2 * 0$ , 0 為整數，所以 0 是 2 的倍數，所以 0 是偶數。