108 學年度指定科目考試數學甲試題詳解

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、 單選題(占 18 分)

1. 某公司尾牙舉辦「紅包大放送」活動。每位員工擲兩枚均勻銅板一次，若出現兩個反面可得獎金 400 元；若出現一正一反可得獎金 800 元；若出現兩個正面可得獎金 800 元並且獲得再擲一次的機會，其獲得獎金規則與前述相同，但不再有繼續投擲銅板的機會(也就是說每位員工最多有兩次擲銅板的機會)。 試問每位參加活動的員工可獲得獎金的期望值為何？

(1) 850 元　(2) 875 元　(3) 900 元　(4) 925 元　(5) 950 元

【108數甲】

答案：(2)

解析：$\frac{1}{4}\times 400+\frac{2}{4}\times 800+\frac{1}{4}\times 800+\frac{1}{16}\times 400+\frac{2}{16}\times 800+\frac{1}{16}\times 800=875$

2. 設 n 為正整數。第 n 個費馬數(Fermat Number)定義為 $F_n=2^{(2^n)}+1$，例如 $F_1=2^{(2^1)}+1=2^2+1=5$，$F_2=2^{(2^2)}+1=2^4+1=17$。試問 $\frac{F_{13}}{F_{12}}$ 的整數部分以十進位表示時， 其位數最接近下列哪一個選項？($\log 2\approx 0.3010$)

(1) 120 (2) 240 (3) 600 (4) 900 (5) 1200

【108數甲】

答案：(5)

解析：$\log\frac{F_{13}}{F_{12}}\approx\log\frac{2^{2^{13}}}{2^{2^{12}}}=2^{13}\log 2-2^{12}\log 2=2^{12}\log 2\approx 1232.896$

3. 在一座尖塔的正南方地面某點 A，測得塔頂的仰角為 14°； 又在此尖塔正東方地面某點 B，測得塔頂的仰角為 $18^\circ30'$，且 A、B 兩點距離為 65 公尺。已知當在線段 $\overline{AB}$ 上移動時，在 C 點測得塔頂的仰角為最大，則 C 點到塔底的距離最接近下列哪一個選項？（ $\cot 14^\circ \approx 4.01$，$\cot 18^\circ 30' \approx 2.99$ ）

(1) 27 公尺 (2) 29 公尺 (3) 31 公尺 (4) 33 公尺 (5) 35 公尺

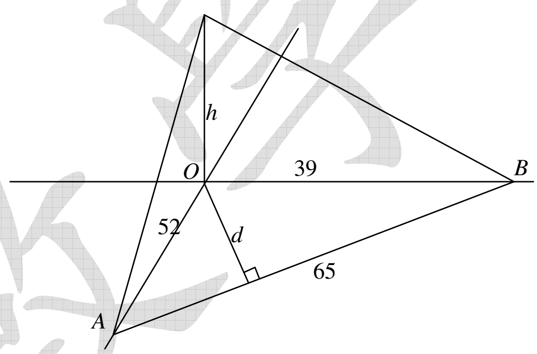
【108數甲】

答案：(3)

解析：$\overline{OA} = h\cot 14^\circ \approx 4h$ $\quad \overline{OB} = h\cot 18^\circ 30' \approx 3h$

$(3h)^2 + (4h)^2 = 65^2 \Rightarrow h = 13$

$\frac{1}{2} \times 39 \times 52 = \frac{1}{2} \times 65 \times d \Rightarrow d = 31.2$



二、 多選題(占 40 分)

4. 設 Γ 為坐標平面上通過 $(7,0)$ 與 $(0,\frac{7}{2})$ 兩點的圓。試選出正確的選項。

(1) Γ 的半徑大於或等於 5

(2) 當 Γ 的半徑達到最小可能值時，Γ 通過原點

(3) Γ 與直線 $x + 2y = 6$ 有交點

(4) Γ 的圓心不可能在第四象限

(5) 若 Γ 的圓心在第三象限，則 Γ 的半徑大於 8

【108數甲】

答案：(2)(5)

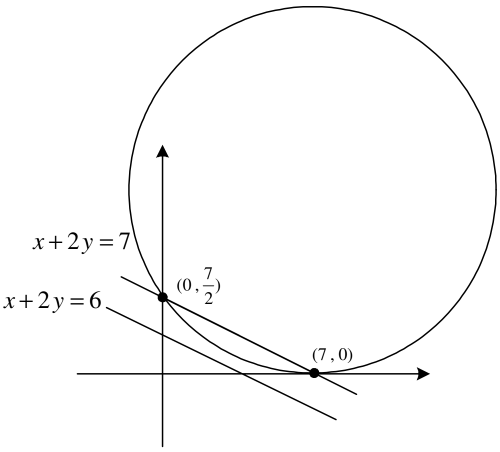
解析：(1)(2)

當以 $(7,0)$ 、$(0,\frac{7}{2})$ 為直徑時，此時直徑最小 $= \sqrt{7^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{245}{4}} = \frac{7\sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ 圓心 $(\frac{7}{2},\frac{7}{4})$，半徑 $\frac{7\sqrt{5}}{4} < 5$

圓方程式:$\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{4}\right)^2=\left(\dfrac{7\sqrt{5}}{4}\right)^2=\dfrac{245}{16}$，$(0,0)$代入合，原點會在圓上

(3) 可能無交點，如圖

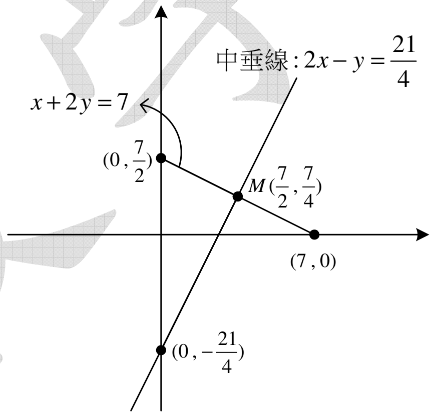


(4) 圓心會在$(7,0),(0,\dfrac{7}{2})$之中垂線上

中垂線方程式為$2x-y=\dfrac{21}{4}$通過一、三、四象限

(5) 當圓心在$(0,-\dfrac{21}{4})$時，半徑$=\dfrac{7}{2}-\left(-\dfrac{21}{4}\right)=\dfrac{35}{4}$

當圓心在第三象限時，半徑$>\dfrac{35}{4}=8.75>8$



5. 袋中有 2 顆紅球、3 顆白球與 1 顆藍球，其大小皆相同。今將袋中的球逐次取出，每次隨機取出一顆，取後不放回，直到所有球被取出為止。試選出正確的選項。

(1) 「取出的第一顆為紅球」的機率等於「取出的第二顆為紅球」的機率

(2) 「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為紅球」兩者為獨立事件

(3) 「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為白球或藍球」兩者為互斥事件

(4) 「取出的第一、二顆皆為紅球」的機率等於「取出的第一、二顆皆為白球」的機率

(5) 「取出的前三顆為白球」的機率小於「取出的前三顆球顏色皆相異」的機率

【108數甲】

答案：(1)(5)

解析：(1) 抽籤超公平

$$P(1st\text{紅})=P(2nd\text{紅})=P(3rd\text{紅})=\cdots=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

(2) $P(1st紅)=\dfrac{1}{3}$ ，$P(2nd紅)=\dfrac{1}{3}$ ，$P(1st紅且2nd紅)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{15}$

因為$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\neq\dfrac{1}{15}$　所以不獨立

(3) $P(1st紅且2nd白或藍)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{3+1}{5}=\dfrac{4}{15}\neq 0$，所以不為互斥事件

(4) $P(1st紅且2nd紅)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{15}$

$P(1st白且2nd白)=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{5}$

(5) $P(前三球皆白球)=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{20}$

$P(前三球顏色皆相異)=\left(\dfrac{2}{6}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{4}\right)\times 6=\dfrac{6}{20}$

6. 設$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$為兩實數數列，且對所有的正整數n，$a_n<{b_n}^2<a_{n+1}$均成立。若已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$，試選出正確的選項。

(1) 對所有的正整數n，$a_n>3$均成立

(2) 存在正整數n，使得$a_{n+1}>4$

(3) 對所有的正整數n，${b_n}^2<{b_{n+1}}^2$均成立

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}{b_n}^2=4$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$或$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-2$

【108數甲】

答案：(3)(4)

解析：$\because\ a_n<a_{n+1}$　$\therefore \lt a_n \gt$為遞增數列

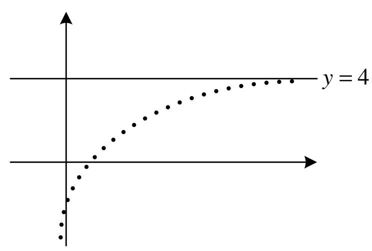
(1) <反例>

若$a_n=\dfrac{4n-3}{n+1}=4-\dfrac{7}{n+1}$

當$n=1$時，$a_1=4-\dfrac{7}{2}=\dfrac{1}{2}<3$

(2) $\because a_n<a_{n+1}$　$\therefore \lt a_n \gt$為遞增數列，又$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$

圖形如右，所以$a_{n+1}<4$



(3) $a_1 < b_1^2 < a_2 < b_2^2 < a_3 < b_3^2 < a_4 < \cdots\cdots < a_n < b_n^2 < a_{n+1} < \cdots\cdots$

$\therefore b_1^2 < b_2^2 < b_3^2 < \cdots\cdots < b_n^2 < b_{n+1}^2 < \cdots\cdots$

(4) $\because a_n < b_n^2 < a_{n+1}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$

當 $n \to \infty$ 時，$\because \lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n^2 < \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} \Rightarrow 4 < \lim\limits_{n\to\infty} b_n^2 < 4$

由夾擠定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^2 = 4$

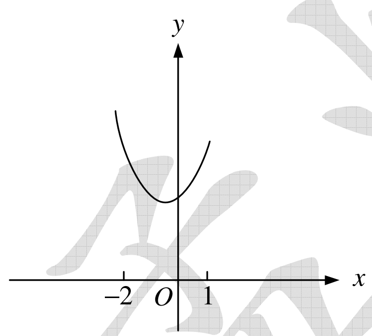
(5) <反例>

若 $b_n = (-1)^n \cdot \dfrac{2n+1}{n+1}$

則 $< b_n > = \left\langle -\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{3}, -\dfrac{7}{4}, \dfrac{9}{5}, \cdots\cdots \right\rangle$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 不存在(不定值)

$< b_n^2 > = \left\langle \dfrac{9}{4}, \dfrac{25}{9}, \dfrac{49}{16}, \dfrac{81}{25}, \cdots\cdots \right\rangle$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \left[(-1)^n \cdot \dfrac{2n+1}{n+1} \right]^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2+4n+1}{n^2+2n+1} = 4$

7. 已知三次實係數多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$，在 $-2 \le x \le 1$ 範圍內的圖形如示意圖：



試選出正確的選項。

(1) $a > 0$

(2) $b > 0$

(3) $c > 0$

(4) 方程式 $f(x) = 0$ 恰有三實根

(5) $y = f(x)$ 圖形的反曲點的 y 坐標為正

【108數甲】

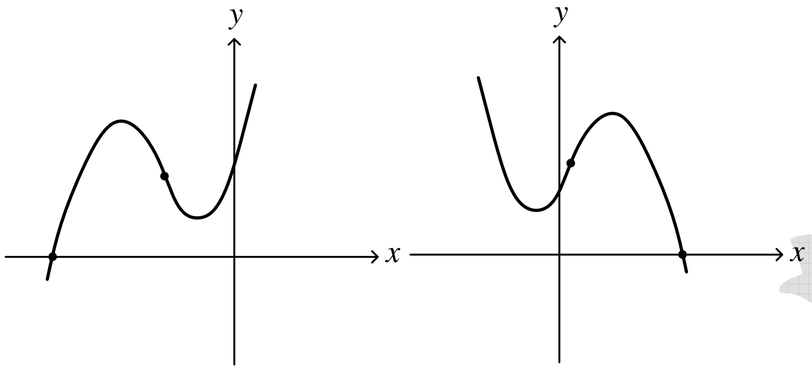
答案：(2)(3)(5)

解析：$f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f'(0)=c>0$（$\because$ 在 $x=0$ 的斜率為正）

$f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(0)=2b>0$（$\because$ 在 $x=0$ 為凹向上）

(1)(4)(5)



8. 坐標平面上以原點 O 為圓心的單位圓上三相異點 A、B、C 滿足 $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，其中 A 點的坐標為 $(1,0)$。試選出正確的選項。

(1) 向量 $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$ 的長度為 4

(2) 內積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$

(3) $\angle BOC$、$\angle AOC$、$\angle AOB$ 中，以 $\angle BOC$ 的度數為最小

(4) $\overline{AB}>\dfrac{3}{2}$

(5) $3\sin\angle AOB=4\sin\angle AOC$

【108數甲】

答案：(1)(5)

解析：(1) $|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|=|-4\overrightarrow{OC}|=4\cdot|\overrightarrow{OC}|=4$

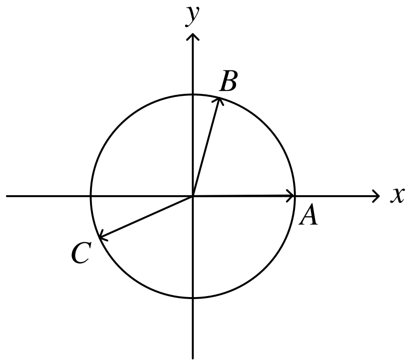
(2) $|2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|^2=|-4\overrightarrow{OC}|^2$

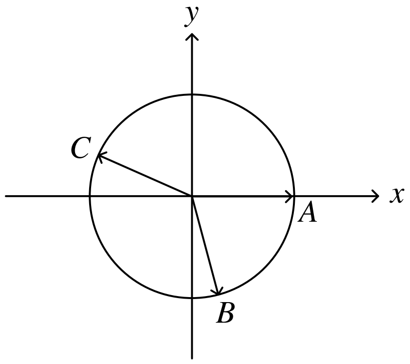
$\Rightarrow 4|\overrightarrow{OA}|^2+9|\overrightarrow{OB}|^2+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=16|\overrightarrow{OC}|^2$

$\Rightarrow 4+9+12(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})=16$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{4}>0$

(3) 由(2)可知，$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 夾角為銳角





若 B 在第一象限 $\Rightarrow C$ 在第三象限

若 B 在第四象限 $\Rightarrow C$ 在第二象限

$\therefore \angle AOB$ 為最小

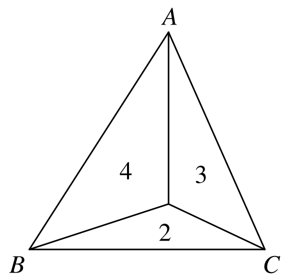
(4) $\because \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow 1\times1\times\cos\theta=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$$\overline{AB}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta=\frac{3}{2}\Rightarrow\overline{AB}=\frac{\sqrt{6}}{2}<\frac{3}{2}$$

(5) $\because 2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=0$

$$\Rightarrow\triangle OBC:\triangle OAC:\triangle OAB=2:3:4$$

$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OAC}=\frac{\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\angle AOB}{\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\angle AOC}=\frac{4}{3}\Rightarrow 3\sin\angle AOB=4\sin\angle AOC$$



三、 選填題(占 18 分)

A. 在坐標平面上，定義一個坐標變換 $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$，其中 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 代表舊坐標，$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ 代表新坐標。若舊坐標為 $\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}$ 的點 P 經此坐標變換得到的新坐標為 $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$，則 $(r,s)=$__________

【108數甲】

答案：$(3,-1)$

解析：$\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}$

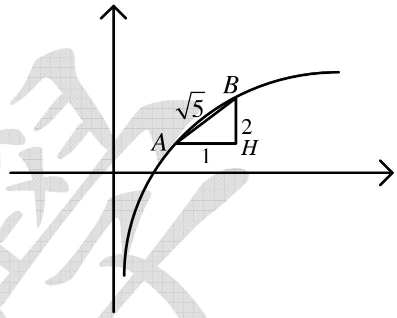
$$\begin{bmatrix}r\\s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

B. 在坐標平面上，$A(a,r)$ 、 $B(b,s)$ 為函數圖形 $y=\log_2 x$ 上之兩點，其中 $a<b$ 。已知 A 、 B 連線的斜率等於 2 ，且線段 $\overline{AB}$ 的長度為 $\sqrt{5}$ ，則 $(a,b)=$__________。(化為最簡分數)

【108數甲】

答案：$(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$

解析：$\because$ 斜率 $=2 \Rightarrow \overline{AH}:\overline{BH}=1:2$ 又 $\overline{AB}=\sqrt{5} \Rightarrow \overline{AH}=1, \overline{BH}=2$



$A(a,r)$ 令 $B(a+1,r+2)$ A,B 代入 $y=\log_2 x \Rightarrow \begin{cases} r=\log_2 a \\ r+2=\log_2(a+1) \end{cases}$

$$2=\log_2\frac{a+1}{a} \Rightarrow \frac{a+1}{a}=2^2=4 \Rightarrow a=\frac{1}{3} \Rightarrow b=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

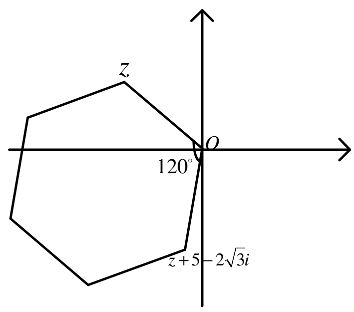
C. 設 z 為複數。在複數平面上，一個正六邊形依順時針方向的連續三個頂點為 z 、 0 、 $z+5-2\sqrt{3}i$ (其中 $i=\sqrt{-1}$)，則 z 的實部為__________。(化為最簡分數)

【108數甲】

答案：$\frac{-7}{2}$

解析：$z\times(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = z+(5-2\sqrt{3}i) \Rightarrow z\times(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1)=5-2\sqrt{3}i$

$$\Rightarrow z=\frac{5-2\sqrt{3}i}{-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} \Rightarrow 2\times\frac{5-2\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i}\times\frac{-3-\sqrt{3}i}{-3-\sqrt{3}i}=2\times\frac{-21+\sqrt{3}i}{12}=\frac{-7}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$$



第貳部分：非選擇題(占 24 分)

一、 坐標空間中以O表示原點，給定兩向量$\overrightarrow{OA}=(1,\sqrt{2},1)$、$\overrightarrow{OB}=(2,0,0)$。試回答下列問題。

(1) 若$\overrightarrow{OP}$是長度為 2 的向量，且與$\overrightarrow{OA}$之夾角為60°，試求向量$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OP}$的內積。(2 分)

(2) 承(1)，已知滿足此條件的所有點P均落在一平面E上，試求平面E的方程式(2 分)

(3) 若$\overrightarrow{OQ}$是長度為 2 的向量，分別與$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$之夾角皆為60°，已知滿足此條件的所有點Q均落在一直線L上，試求直線L的方向向量。(4 分)

(4) 承(3)，試求出滿足條件的所有Q點之坐標。(4 分)

【108數甲】

答案：(1) 2；(2) $x+\sqrt{2}y+z=2$；(3) $(0,1,-\sqrt{2})$；(4) $Q(1,\sqrt{2},-1)\ or\ Q(1,-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{5}{3})$

解析：(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OP}|\cdot\cos 60^\circ=2\times2\times\frac{1}{2}=2$

(2) 設$P(x,y,z)$均滿足$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=2\Rightarrow x\cdot1+y\cdot\sqrt{2}+z\cdot1=2$

$\therefore P$在$x+\sqrt{2}y+z=2$上

(3) 設$Q(a,b,c)$、$\overrightarrow{OQ}=(a,b,c)$，$\begin{cases}|\overrightarrow{OQ}|=2\\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}=2\\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OB}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2+c^2=4\\ a+\sqrt{2}b+c=2\\ 2a=2\end{cases}$

$Q(a,b,c)$在$L:\begin{cases}x+\sqrt{2}y+z=2\\ x=1\end{cases}$上，$\overrightarrow{L}=(1,\sqrt{2},1)\times(1,0,0)=(0,1,-\sqrt{2})$

(4) $\because Q(a,b,c)$在L上，又$(1,0,1)$在L上

設參數式$Q(1,0+t,1-\sqrt{2}t)$代入$a^2+b^2+c^2=4\Rightarrow1+t^2+(1-\sqrt{2}t)^2=4$

$\Rightarrow3t^2-2\sqrt{2}t-2=0\Rightarrow t=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{32}}{6}=\sqrt{2}\ or-\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore Q(1,\sqrt{2},-1)\ or\ Q(1,-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{5}{3})$

二、 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf(x)=3x^4-2x^3+x^2+\int_1^x f(t)dt$ 對 $x\geq 1$ 恆成立。試回答下列問題。

(1) 試求 $f(1)$。(2 分)

(2) 試求 $f'(x)$。(4 分)

(3) 試求 $f(x)$。(2 分)

(4) 試證明恰有一個大於 1 的正實數 a 滿足 $\int_0^a f(x)dx=1$。(4 分)

【108數甲】

答案：(1) 2；(2) $12x^2-6x+2$；(3) $4x^3-3x^2+2x-1$

解析：(1) x 代 $1 \Rightarrow 1\cdot f(1)=3-2+1+\int_1^1 f(t)dt \Rightarrow f(1)=2+0=2$

(2) 左右對 x 微分 $\Rightarrow 1\cdot f(x)+x\cdot f'(x)=12x^3-6x^2+2x+\underbrace{f(x)}_{\text{微積分基本定理}}$

$\Rightarrow x\cdot f'(x)=12x^3-6x^2+2x$，$\therefore f'(x)=12x^2-6x+2$

(3) $f(x)=\int f'(x)dx=4x^3-3x^2+2x+C$，由 $f(1)=4-3+2+C=2 \Rightarrow C=-1$

$\therefore\ f(x)=4x^3-3x^2+2x-1$

(4) $\int_0^a f(x)dx=1 \Rightarrow x^4-x^3+x^2-x\Big|_0^a=1 \Rightarrow a^4-a^3+a^2-a=1$

$\Rightarrow a^4-a^3+a^2-a-1=0$

令 $f(x)=x^4-x^3+x^2-x-1$，$f'(x)=4x^3-3x^2+2x-1=(x-1)(4x^2+x+3)+2$

① 當 $x>1$ 時，$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 為遞增

② 又由勘根 $f(1)\cdot f(2)=(-1)\cdot 9<0$，$\therefore f(x)=0$ 在 $x=1, x=2$ 之間必有實根

由①②恰一個大於 1 的正實數滿足 $f(x)=0$

$\therefore$恰有一個大於 1 的正實數 a 滿足 $\int_0^a f(x)dx=1$