

108 華江高中代理教師

一、填充題(90 分)

1.
$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ a^2+b^2+c^2=12, \text{ 且 } a>b>c, \text{ 求 } (a,b,c). \\ a^3+b^3+c^3=28 \end{cases}$$

2. a_n 為 $(3-\sqrt{x})^n$ 的 x 項係數, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^2}{a_2} + \frac{3^3}{a_3} + \dots + \frac{3^n}{a_n} \right)$ 。

3. 某一個超級細菌 1 分鐘以後會死亡或維持 1 個以及分裂成 2 個; 若 1 分鐘後死亡機率為 $\frac{1}{6}$ 、維持 1 個的機率為 $\frac{1}{3}$, 請問 3 分鐘後細菌變成 5 個的機率。

4. 甲、乙、丙實力相當, 連勝兩局比賽才結束且沒有和局, 其中兩人先進行比賽, 再和另一位選手比賽。若甲乙比賽, 求甲贏得比賽的機率。

5. 給定空間中兩點 A, B , 直線 $L: \frac{x-*}{*} = \frac{y-*}{*} = \frac{z-*}{*}$, 若直線上 P 滿足 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值, 求 P 點座標。

6. 10 個空位, 若有 5 個人分成 2 人、2 人、1 人三組入座, 同組人相鄰且不同組人不相鄰, 求入座的方法數。

7. 國文考科分為測驗成績與寫作成績, 測驗成績的平均數為 62、標準差為 15; 寫作成績的平均數為 18、標準差為 5, 且測驗成績與寫作成績的相關係數為 0.6, 若國文總成績為寫作成績和測驗成績的加總, 求總成績的標準差。

8. 空間中給定不共平面的向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 求 $|\vec{r}\vec{a} + \vec{s}\vec{b} + \vec{c}|$ 的最小值。

9. $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$, 求 $f(x)$ 的最大值。

10. $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = * + \sqrt{*}$, 求 $f(x) = (\log_2 \frac{x}{2 \sin \theta})(\log_4 \frac{x}{4 \sin \theta})$ 的最小值。

11.
$$\begin{cases} x = \sqrt{z^2 - \frac{1}{49}} + \sqrt{y^2 - \frac{1}{49}} \\ y = \sqrt{x^2 - \frac{1}{49}} + \sqrt{z^2 - \frac{1}{49}} \\ z = \sqrt{y^2 - \frac{1}{49}} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{49}} \end{cases}, \text{ 求 } x+y+z。$$

12. 有一直線 L 過 $A(1,0)$ 與 $f(x) = x^3 - 4x - 1$, 求直線 L 與曲線 $f(x)$ 所圍成的區域面積。

13. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{(\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \dots + \sqrt[3]{n})^3}$ 。

14. 有一三角形邊長 $\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \sqrt{21}$, 三邊長對外作正三角形, 並將三個正三角形的重心連線, 可得一個新的正三角形, 求新的正三角形面積。

15. 在同一平面上, 有兩個三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PRQ$, 若 $\overline{PA} + 2\overline{PB} + 3\overline{PC} = \overline{CA}$, $\overline{QA} + 2\overline{QB} + 3\overline{QC} = 2\overline{AB}$, $\overline{RA} + 2\overline{RB} + 3\overline{RC} = 3\overline{BC}$, 求 $\triangle PRQ$ 與 $\triangle ABC$ 的比值。

二、計算證明題(20 分)

1. 空間中給定一直線 L 與線外一點 P , 直線 L 上有一點 Q 。請提供三個方法找出 \overline{PQ} 的最短距離以及 Q 點座標。

2. 三角形 ABC 三頂點對應邊為 a, b, c , 內部一點 P 到 $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ 的距離依序為 x, y, z , 且三角形面積為 S

(1) xyz 有最大值為_____時, 則 P 點為_____。

(2) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ 有最大值為_____時, 則 P 點為_____。(出題當下有誤植, 但當下沒給回應或糾正...送分吧)