

國立關西高級中學 108 學年度第 1 次教師甄選題目試卷

科 別	數學科試卷	卷 別	<input checked="" type="checkbox"/> 單面 <input type="checkbox"/> 雙面、共 2 頁
-----	-------	-----	--

一、填充題(共 10 題，一題 6 分)

- 實數 p, q 滿足 $q \leq \frac{p^2}{4}$ 試問當 $(p, q) =$ _____ 時， $|p-1| + |q-1|$ 會有最小值。
- 複數數列 $\{z_n\}$ 定義為 $z_1 = 3$ ， $z_{n+1} = (1 + \sqrt{3}i)z_n - \sqrt{3}i$ 試求無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{n+1} - z_n|}$ 的值 = _____。
- 設隨機變數 X 的機率分布為二項分布 $B(n, p)$ ，令隨機變數 Y 的定義如下：

$$Y = \begin{cases} 2 & \text{若 } X \text{ 為偶數} \\ -1 & \text{若 } X \text{ 為奇數} \end{cases}$$
 試求 Y 的期望值 = _____。(以 n, p 表示)。
- 二元二次方程式 $y^2 + xy - 7x = 0$ 的正整數解 (x, y) 為 _____。
- 將正整數 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 任意分成兩組，使得每組至少有一個數。則第一組數的和與第二組數的和相等的機率為 _____。
- 已知點 $A(3, 1)$ ， $B(\frac{5}{3}, 2)$ 是平行四邊形 $ABCD$ 的頂點，已知 $ABCD$ 四個點都落在函數 $f(x) = \log_2 \frac{ax-b}{x-1}$ 的圖形上，試求平行四邊形 $ABCD$ 的面積 = _____。
- 已知拋物線的頂點在原點，焦點在 x 軸上， $\triangle ABC$ 三個頂點都在拋物線上，且 $\triangle ABC$ 的重心為拋物線的焦點 F ，若 BC 邊所在的直線為 $4x + y - 20 = 0$ ，試求拋物線的方程式為 _____。
- 已知橢圓的兩個焦點為 $F_1(-1, 0)$ 、 $F_2(1, 0)$ ，且直線 $L: y = x - \sqrt{3}$ 為此橢圓的切線，試求此橢圓的方程式為 _____。

9. 已知 a, b, c, d 為實數，方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 有 4 個虛根，其中 2 個根的積為 $13+i$ ，另 2 個根的和為 $3+4i$ ，試求 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 試求曲線 $y = \frac{1}{e^x}$ 與 $y = -e^{x+1}$ 的公切線 L 的方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

二、計算證明題：(共 2 題，一題 20 分)

1. 對於任意的自然數 n ，定義函數 $f_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x| & , |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & , |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$ ，

並令 $I_n = \int_{-1}^1 f_n(x) \cos x \, dx$ ，試回答下列問題：

(1) 請用 n 表示 I_n 。(12 分)

(2) 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ 的值。(8 分)

2. 坐標平面上， O 為原點，函數 $f(x) = x^3 - 3x$ 上一點 $P(a, a^3 - 3a)$ ，其中 $a > 1$ ，設過 P 斜率為 k 的直線為 L ，試回答下列問題：

(1) 若直線 L 與 $f(x)$ 的圖形共有 3 個相異交點，試問斜率 k 須滿足甚麼條件。(8 分)

(2) 當 $a = \sqrt{3}$ 且 $k < 0$ 時，設直線 L 與 $f(x)$ 的圖形相交於 P, Q, R 三相異點，令 $S(k)$ 表示 $\triangle OQR$ 的面積，試求 $S(k)$ 的最大值。(12 分)