臺北市立松山高級工農職業學校 108 學年度正式教師甄選
【數學科】初試試題

一、填充題(<u>不需要</u>寫算式，每題 5 分)

1. 求有 30 個正因數的最小正整數為________。

2. 已知一實係數三次多項式 $f(x)$ 在 $x=2$ 有極大值 5，且圖形 $y=f(x)$ 在 $(5, f(5))$ 之切線方程式為 $y-f(5)+7(x-5)=0$，試問 $\int_2^5 f''(x)dx$ 之值________。

3. 空間中，以 $\overline{AB}$ 為共同邊的兩正方形 $ABCD$、$ABEF$，其邊長皆為 5。已知內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=11$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=$________。

4. 求與直線 $x+y=1$、x 軸、y 軸均相切的圓半徑為______。

5. 設 z 為一複數，且 $\dfrac{z^2-2}{z^2+2}=i$ (其中 $i=\sqrt{-1}$ 為虛數單位)。試問 $z=$________。

6. 若 $[x]$ 表示小於或等於實數 x 的最大整數值，則 $\sum_{k=1}^{125}\left[\sqrt[3]{k}\right]=$________。

7. 設 F_1 與 F_2 為坐標平面上雙曲線 $\Gamma:\dfrac{x^2}{8}-y^2=1$ 的兩個焦點，且 $P(-4,1)$ 為 G 上一點。若 $\angle F_1PF_2$ 的角平分線與 x 軸交於點 D，則 $\overline{DP}=$________。

8. 坐標平面上有三條直線 L、L_1、L_2，其中 L 的斜率為 $\dfrac{1}{4}$，L_1、L_2 的斜率分別為 $\dfrac{3}{4}$、$-\dfrac{3}{4}$。已知 L 被 L_1、L_2 所截出的線段長為 51，則 L、L_1、L_2 所決定的三角形的面積為________。

9. 投擲三顆公正的骰子一次，試求三顆骰子所得點數的乘積被 6 整除的機率為________。

10. 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。令 n 為正整數，T_n 為平面上以直線 $y=\dfrac{-1}{n}x+n$，以及 x 軸、y 軸所圍成的三角形區域(包含邊界)，而 a_n 為 T_n 上的格子點數目，則 $a_n=$________。(以 n 表示)

11. 令 Ω 為 $y=x^{\frac{3}{2}}+1$，y 軸與 $y=9$ 所圍成的區域，求 Ω 繞 y 軸旋轉所得旋轉體的體積________。

12. 已知 a,b 為實數，$\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{ax+b}-2}{x-1}=1$，數對 $(a,b)=$________。

13. 已知x,y,z為實數，$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ x^2+y^2+z^2=\frac{3}{2} \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$，$x+y+z$為整數，求$x+y+z$的值________。

14. 在坐標平面上，考慮二階方陣$A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$所定義的線性變換。對於平面上異於原點$O$的點$P_1$，設$P_1$經$A$變換成$P_2$，$P_2$經$A$變換成$P_3$。令$a=\overline{OP_1}$，試以$a$表示$\triangle P_1P_2P_3$的面積________。

15. 已知$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=e$，試求$\frac{1}{1!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{5!}+\frac{4}{7!}+\cdots=$________。

16. 設$A(0,0,6)$,$B(0,0,20)$為空間中兩定點，$P(x,y,0)$為一動點。若$0\le x\le 15$，$0\le y\le 15$，$\angle APB\ge 30^\circ$，求P點之軌跡所形成圖形之面積________。

二、教學題(每題 10 分)

1. 講義上有一個關於角平分線的公式，請回答以下問題。

> 平面上兩直線L_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$，L_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$
>
> (1) 若$a_1a_2+b_1b_2>0$，則
>
> 銳夾角角平分線為$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$鈍夾角角平分線為
>
> $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=+\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$
>
> (2) 若$a_1a_2+b_1b_2<0$，則
>
> 銳夾角角平分線為$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=+\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$鈍夾角角平分線為
>
> $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

(1)判斷$a_1a_2+b_1b_2$的正負用意為何？(3 分)

(2)若$a_1a_2+b_1b_2>0$時，銳夾角角平分線加”負號”，鈍夾角角平分線加”正號”，請問原因為何？(3 分)

(3)就你的教學經驗還有沒有其他方法可以協助學生求得銳夾角角平分線，請簡述。(4 分)

2. 素養導向試題的目的是為了引導素養導向的教學，素養導向教學的目的是培養核心素養。適當設計的素養導向試題，除了可讓現場老師掌握核心素養精神，進而調整教學，最後讓素養導向教學的效果反映在學生的評量成果上。
請由<u>高職數學課程</u>選取某一特定主題，設計一個素養導向題組，其中包含<u>三個小題</u>，每個小題請寫出計算過程和答案。

一、填充題答案：

1. 720	2. -7	3. 36	4. $\frac{2\pm\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$	5. $1+i,-1-i$
6. 405	7. $\sqrt{5}$(送分)	8. 408	9. $\frac{133}{216}$	10. $\frac{n^3+n^2+2n+2}{2}$
11. $\frac{384}{7}\pi$	12. $(12,-4)$	13. 1	14. $27a^2$	15. $\frac{1}{2}e$
16. $13\pi+75\sqrt{3}$				