教育部受託辦理108學年度
公立高級中等學校教師甄選

數學科　試題

數學科 試題

請注意：本試題共兩部分，選擇題12題，及綜合題2大題，共計100分；**選擇題請用2B軟心鉛筆在答案卡劃記，綜合題限用藍色、黑色之原子筆或鋼筆在答案本上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆**。本科不可以使用電子計算器。

第一部分：選擇題（共40分）

一、單選題（每題3分，共24分）

(A) 1. 若$i=\sqrt{-1}$，試問下列哪一個複數的主幅角最大？

(A) $1+\cos 200^\circ+i\sin 200^\circ$ (B) $-1+\cos 200^\circ+i\sin 200^\circ$

(C) $1+\cos 200^\circ-i\sin 200^\circ$ (D) $1-\cos 200^\circ-i\sin 200^\circ$

(C) 2. 若$(x-\frac{2}{x})^n$展開式中$\frac{1}{x^2}$項的係數與$\frac{1}{x^4}$項的係數之比值為－1，則$n=$？

(A)4 (B)6 (C)8 (D)10

(C) 3. 矩形$ABCD$中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，沿$\overline{AC}$將矩形$ABCD$折成一個直二面角B－$\overline{AC}$－D，

則四面體$ABCD$的外接球的體積為？

(A) $\frac{125}{12}\pi$ (B) $\frac{125}{9}\pi$ (C) $\frac{125}{6}\pi$ (D) $\frac{125}{3}\pi$

(D) 4. 一圓周上有 10 個等分點，從這 10 個等分點中，選擇 4 個等分點為頂點構成一個四邊形，則此四邊形為梯形的機率為何？

(A) $\frac{8}{21}$ (B) $\frac{4}{21}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{7}$

(A) 5. 設 $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$，其中 a、b 及 c 均為複數，且 $p(16i)=p(-1)=p(81)=0$，試問方程式 $x^{12}+ax^8+bx^4+c=0$ 有多少個根不是實數？

(A)10 (B)9 (C)8 (D)7

(C) 6. 小西瓜參加百萬學堂大挑戰，主持人小燕姐決定先跟小西瓜來個百萬大放送，她先準備了A、B、C、D四個紅包，其中有一個包有 100 萬元支票，剩下的則包 1000 元，而小西瓜必須先從四個紅包挑一包。當決定好之後，小燕姐會打開剩下的三個紅包中裡面為 1000 元的其中一個，並問小西瓜是否要更改選擇。若小西瓜決定換剩下兩個的其中一個，則她贏得 100 萬支票的機率為多少？

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$

(B) 7. 小明在森林中迷了路，若繼續往前走則經過 5 分鐘後會回到原地，若返回走則有一半的機會於 5 分鐘後回到原地，另一半的機會於 10 分鐘後走出森林；假設小明向前走的機率為 0.6，問小明能夠走出森林所花費時間的期望值為？

(A)25 (B)30 (C)40 (D)45 分鐘

(B) 8. 已知 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$，則 $1+3x+6x^2+10x^3+\cdots+\frac{(n+1)n}{2}x^{n-1}+\cdots=$

(A) $\frac{1}{(1-x)^2}$ (B) $\frac{1}{(1-x)^3}$ (C) $\log(1-x)$ (D) $\log(1-x^2)$

二、複選題（每題4分，全對始給分，共16分）

(BCD) 9. 下列各方程式，何者有三個實根？

(A) $x^2-1=2^{-|x|}$

(B) $x-\log_2|x|=1$

(C) $1-x=\tan x\,(0\le x\le 2\pi)$

(D) $\log_{10}x=\cos x$

(AC) 10. 職棒明星賽採5戰3勝制，當參賽紅、白兩隊中有一隊贏得3場比賽時，就由該隊獲勝

而賽事結束。每場比賽皆須分出勝負，且每場比賽的勝負皆不受之前已賽結果影響

。假設紅隊在任一場贏球的機率為定值 p，以 $f(p)$ 表實際比賽場數的期望值（

$0\le p\le 1$），請選出正確的選項：

(A) $f(p)$ 的常數項等於3

(B) $f(p)$ 是 p 的5次多項式

(C) 函數 $f(p)$ 在 $p=\frac{1}{2}$ 時有最大值

(D) 若紅、白兩隊實力旗鼓相當，則最後比5場結束的機率大於比4場結束的機率

(ABC) 11. 若 z_1,z_2,z_3,z_4 分別為方程式 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ 的四個根，下列選項何者正確？

(A)設 $i=\sqrt{-1}$，則 $i\times z_1$ 為方程式 $z^5=i$ 的一個根

(B) $|z_k-1|>1$ 對 $k=1$，2，3，4 時皆成立

(C) $(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)(z_4+1)=1$

(D) $(2-z_1)^2+(2-z_2)^2+(2-z_3)^2+(2-z_4)^2=18$

(ABD) 12. 現有一個邊長為 1 的正立方體 $ABCD\text{-}EFGH$。設向量 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$，向量 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{e}$，向量 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{d}$。若線段 $\overline{DF}$ 上有一點 P，使 $\overline{DF}\perp\overline{AP}$。且線段 $\overline{AP}$ 的延長線與平面 $CDHG$ 的交點為 R。則下列敘述何者正確？

(A) $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{d}+\overrightarrow{e})$

(B) $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{b}+2\overrightarrow{d}+\overrightarrow{e})$

(C) $\overline{DP}:\overline{PF}=2:1$

(D)若 $\overrightarrow{AP}$ 與平面 $CDHG$ 的法線向量的夾角為 θ，則 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$

第二部分：綜合題（共60分）

一、填充題（每題4分，共36分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+(1+2)}+\frac{1}{1+(1+2)+(1+2+3)}+\ldots+\frac{1}{1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+n)}\right)=$ $\underline{\frac{3}{2}}$。

2. 設 $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$，$g(x)=x^4-3x^3+5x^2-8x+1$，且 α、β、γ 為 $f(x)=0$ 之三根，試求 $g(\alpha)\cdot g(\beta)\cdot g(\gamma)$ 之值 $\underline{-58}$。

3. 曲線 $y=-x^2+2x$ 與直線 $x+y=0$ 圍成封閉區域 Γ，求 Γ 繞 x 軸旋轉所成的旋轉體體積= $\underline{\frac{20}{3}\pi}$。

4. 已知 $n\in N$，且 $n<\sqrt{108+\sqrt{108+\sqrt{108+\sqrt{108+\sqrt{108+\sqrt{108+\cdots}}}}}}<n+1$，則 $n=$ $\underline{10}$。

5. 已知 A、B、C、D、E 五人各有一頂不同之帽子，除 A 外另四人皆記得自己的帽子；重新混合後，依序由 A、B、C、D、E 去取回一頂帽子。A 任取一頂帽子，另四人若自己的帽子已被取走方可任取其餘帽子中之一項，則五人取帽子之方法共有 $\underline{16}$ 種。

6. 設有 5 個二維數據，其統計資料如下：$\sum_{i=1}^{5} x_i = 10$，$\sum_{i=1}^{5} y_i = 400$，$\sum_{i=1}^{5} x_i^{\ 2} = 30$

如果<u>小小兵</u>求 y 對 x 的迴歸直線方程式時，不慎將斜率公式誤植為 $\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i+\mu_x)(y_i+\mu_y)}{\sum_{i=1}^{5}(x_i+\mu_x)^2}$

求得斜率為 $\dfrac{311}{9}$，其餘計算沒有錯誤，則正確的迴歸直線方程式應為 $\underline{y=-9x+98}$。

7. 設 $f(x)=\dfrac{|x|}{1+|x|}$，求 $f'(0)=$ __不存在__，$f'(1)=\underline{\dfrac{1}{4}}$。

8. 滿足 $(|x|-3)^2+(|y|-1)^2 \le 4$ 所圍出的區域面積為 $\underline{4\sqrt{3}+\dfrac{32}{3}\pi}$。

9. 已知數列 $a_{n+1}=2a_n+4^n$，$a_1=3$，則求一般項 $a_n=\underline{\dfrac{1}{2}(2^n+4^n)}$。

二、計算證明題（每題8分，共24分）

1. (1)若 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收斂，試證明：$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$。

(2)「若 $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$，則 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收斂」是否成立？若不成立，試舉一反例說明。

2. 設 $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n}x^{2n}$，其中 $a_0, a_1, \cdots$ 為係數，$n \in \mathbb{N}$。

證明：$a_0+a_3+a_6+\cdots = a_1+a_4+a_7+\cdots = a_2+a_5+a_8+\cdots = 3^{n-1}$

3. 若 $0 \le x < 2\pi$，求滿足 $\cos 2x = \cos x(\sin x + |\sin x|)$ 的所有 x 之值。