

108 北一女中（記憶版）

題目共 8 題，測驗時間 120 分鐘。

1. $(ax + 1)^2 = a^2(1 - x^2)$ 的根都落在區間 $(-1, 1)$ 之間，試求實數 a 的範圍。
2. 已知空間中三點 $A(1, -1, 4)$, $B(3, 5, 2)$, $C(4, 2, -2)$ ，平面 E 分別交 \overline{AB} , \overline{AC} 於 P 、 Q 兩點，且 $E \perp \overline{AC}$ ，又 ΔABC 的面積為 ΔAPQ 的 6 倍，試求平面 E 的方程式。
3. 四次函數 $f(x)$ 在 $(0, 0)$ 的切線為 L ，且除了原點之外， L 只與 $f(x)$ 恰交於一點 $(1, 1)$ ，且在 $(1, 1)$ 的切線方程式為 $y = 2x - 1$ ，試求 $f(x)$ 。
4. 一顆不公正的骰子有點數 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，投擲兩次，兩次點數相同的機率為 S ，兩次點數為一奇一偶的機率為 T ，試證明：(1) $S \geq \frac{1}{6}$ ； (2) $\frac{1}{2} \geq T \geq 1 - 3S$ 。
5. 拋物線 $y = 2x^2$ ，圓 C_1 (半徑為 1) 在拋物線上方與拋物線相切於 2 點，圓 C_2 在拋物線在 C_2 上面和 C_1 相切和拋物線相切於 2 點， C_3 、 C_4 ... 以此類推，試求：
(1) 求 C_1 圓的圓心座標。(2) 求 C_n 圓的圓心座標(用 n 表示)。
6. 題目：100 人考試，國英數及格分別是 85、75、70 人，求 3 科都及格的人最少有幾人。
試用 2 種方法解釋。
7. 偵錯題，題目：已知三角形 ΔABC 中， $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{BC} = 3$ ， $\angle A = 2\angle C$ ，試求 \overline{AC} 。
學生解法：先用正弦定理求得 $\cos \angle C = \frac{3}{4}$ ，再用餘弦定理算出 $\overline{AC} = 2$ 或 $\frac{5}{2}$ 。
問：此方法哪裡錯誤，又正確做法為何？
8. 偵錯題，題目：半徑為 r 的球面中，求最大內接直圓柱和圓錐體積。
學生解法：
 1. 假設圓柱底面半徑是 x ，將圓柱體積用 x 表示，再用算幾求出 x 代回。
 2. 圓錐體積 = $\frac{1}{3} \times$ 圓柱體積。問：此方法哪裡錯誤，又正確做法為何？